സ്റ്റാൻഡേർഡ് X

ഗണിതം

ഭാഗം - 2

കേരളസർക്കാർ

പൊതുവിദ്യാഭ്യാസവകുപ്പ്

സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി, കേരളം

2019

NT-887-1-MATHS-10-M-VOL.2

ദേശീയഗാനം

ജനഗണമന അധിനായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ,
പഞ്ചാബസിന്ധു ഗുജറാത്ത മറാഠാ
ദ്രാവിഡ ഉത്കല ബംഗാ,
വിന്ധ്യഹിമാചല യമുനാഗംഗാ,
ഉച്ഛല ജലധിതരംഗാ,
തവശുഭനാമേ ജാഗേ,
തവശുഭ ആശിഷ മാഗേ,
ഗാഹേ തവ ജയ ഗാഥാ
ജനഗണമംഗലദായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ.
ജയഹേ, ജയഹേ, ജയഹേ,
ജയ ജയ ജയ ജയഹേ!

പ്രതിജ്ഞ

ഇന്ത്യ എന്റെ രാജ്യമാണ്. എല്ലാ ഇന്ത്യക്കാരും എന്റെ സഹോദരീ സഹോദരന്മാരാണ്.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തെ സ്നേഹിക്കുന്നു; സമ്പൂർണവും വൈവിധ്യപൂർണവുമായ അതിന്റെ പാരമ്പര്യത്തിൽ ഞാൻ അഭിമാനം കൊള്ളുന്നു.

ഞാൻ എന്റെ മാതാപിതാക്കളെയും ഗുരുക്കന്മാരെയും മുതിർന്നവരെയും ബഹുമാനിക്കും.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തിന്റെയും എന്റെ നാട്ടുകാരുടെയും ക്ഷേമത്തിനും ഐശ്വര്യത്തിനും വേണ്ടി പ്രയത്നിക്കും.

Prepared by :
State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram 695 012, Kerala

Website : www.scertkerala.gov.in
E-mail : scertkerala@gmail.com
Phone : 0471-2341883, Fax : 0471-2341869
Typesetting and Layout : SCERT
Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi-30

പ്രിയപ്പെട്ട കുട്ടികളെ,

അളവുകളുടെയും അവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധങ്ങളുടെയും പഠനമാണ് ഗണിതശാസ്ത്രത്തിന്റെ ഒരു പ്രധാന ഭാഗം. അതുകൊണ്ടുതന്നെ ഭൗതികശാസ്ത്രങ്ങളിലും സാമൂഹ്യശാസ്ത്രങ്ങളിലുമെല്ലാം ഇത്തരം ബന്ധങ്ങൾ കൃത്യമായി അവതരിപ്പിക്കാൻ ഗണിതം ആവശ്യമായിവരുന്നു. അളവുകളെ കേവലസംഖ്യകളായും വസ്തുക്കളെ ജ്യാമിതീയരൂപങ്ങളായും കണ്ടു തുടങ്ങുമ്പോൾ, ഗണിതത്തിന്റെ ആശയതലം രൂപപ്പെടുന്നു. സംഖ്യാബന്ധങ്ങൾ ബീജഗണിതവാക്യങ്ങളാകുന്നു. വസ്തുക്കളുടെ കാര്യകാരണബന്ധം, ആശയങ്ങളുടെ യുക്തിയുക്തതയായി വളരുന്നു, ഗണിതതത്വങ്ങൾ രൂപപ്പെടുന്നു. ഇവ കൂടുതൽ ഫലപ്രദമായ പ്രയോഗങ്ങളിലേക്കു നയിക്കുന്നു. ഗണിതതത്വങ്ങളുടെയും അവയുടെ പ്രയോഗങ്ങളുടെയും പ്രാഥമിക പാഠങ്ങളാണ് ഇവിടെ അവതരിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നത്.

വിഷമകരമായ ഗണിതക്രിയകൾ ചെയ്യുന്നതും സങ്കീർണങ്ങളായ ജ്യാമിതീയരൂപങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്നതുമെല്ലാം ഇക്കാലത്ത് കമ്പ്യൂട്ടറുകൾ ഉപയോഗിച്ചാണ്. കാര്യക്ഷമമായി കമ്പ്യൂട്ടർ ഉപയോഗിക്കാൻ ഗണിതം ആവശ്യമാണുതാനും. കമ്പ്യൂട്ടറുകൾക്ക് ഗണിതപഠനത്തിലും മറിച്ചുമുള്ള സ്വാധീനം പല പാഠങ്ങളിലും സൂചിപ്പിച്ചിട്ടുണ്ട്. ജിയോജിബ്ര എന്ന ജ്യാമിതീയപ്രോഗ്രാമും പൈഥൺ എന്ന കമ്പ്യൂട്ടർ ഭാഷയും ഉപയോഗിക്കുന്നതിന്റെ ഉദാഹരണങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്. ഇവ ഉപയോഗിച്ചുള്ള കൂടുതൽ പഠനവിഭവങ്ങൾ സമഗ്രപോർട്ടൽ, ക്യൂ.ആർ. കോഡ് എന്നിവ മുഖേന ലഭ്യമാണ്.

സ്നേഹാശംസകളോടെ,

ഡോ. ജെ. പ്രസാദ്
ഡയറക്ടർ, എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി.

ഭാരതത്തിന്റെ ഭരണഘടന

ഭാഗം IV ക

മൗലിക കർത്തവ്യങ്ങൾ

51 ക. മൗലിക കർത്തവ്യങ്ങൾ - താഴെപ്പറയുന്നവ ഭാരതത്തിലെ ഓരോ പൗരന്റെയും കർത്തവ്യം ആയിരിക്കുന്നതാണ്:

(ക) ഭരണഘടനയെ അനുസരിക്കുകയും അതിന്റെ ആദർശങ്ങളെയും സ്ഥാപനങ്ങളെയും ദേശീയപതാകയെയും ദേശീയഗാനത്തെയും ആദരിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഖ) സ്വാതന്ത്ര്യത്തിനുവേണ്ടിയുള്ള നമ്മുടെ ദേശീയസമരത്തിന് പ്രചോദനം നൽകിയ മഹനീയാദർശങ്ങളെ പരിപോഷിപ്പിക്കുകയും പിൻതുടരുകയും ചെയ്യുക;

(ഗ) ഭാരതത്തിന്റെ പരമാധികാരവും ഐക്യവും അഖണ്ഡതയും നിലനിർത്തുകയും സംരക്ഷിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഘ) രാജ്യത്തെ കാത്തുസൂക്ഷിക്കുകയും ദേശീയ സേവനം അനുഷ്ഠിക്കുവാൻ ആവശ്യപ്പെടുമ്പോൾ അനുഷ്ഠിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ങ) മതപരവും ഭാഷാപരവും പ്രാദേശികവും വിഭാഗീയവുമായ വൈവിധ്യങ്ങൾക്കതീതമായി ഭാരതത്തിലെ എല്ലാ ജനങ്ങൾക്കുമിടയിൽ, സൗഹാർദവും പൊതുവായ സാഹോദര്യമനോഭാവവും പുലർത്തുക. സ്ത്രീകളുടെ അന്തസ്സിന് കുറവു വരുത്തുന്ന ആചാരങ്ങൾ പരിത്യജിക്കുക;

(ച) നമ്മുടെ സംസ്കാരസമന്വയത്തിന്റെ സമ്പന്നമായ പാരമ്പര്യത്തെ വിലമതിക്കുകയും നിലനിറുത്തുകയും ചെയ്യുക;

(ഛ) വനങ്ങളും തടാകങ്ങളും നദികളും വന്യജീവികളും ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രകൃത്യാ ഉള്ള പരിസ്ഥിതി സംരക്ഷിക്കുകയും അഭിവൃദ്ധിപ്പെടുത്തുകയും ജീവികളോട് കാരുണ്യം കാണിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ജ) ശാസ്ത്രീയമായ കാഴ്ചപ്പാടും മാനവികതയും, അന്വേഷണത്തിനും പരിഷ്കരണത്തിനും ഉള്ള മനോഭാവവും വികസിപ്പിക്കുക;

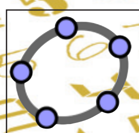
(ഝ) പൊതുസ്വത്ത് പരിരക്ഷിക്കുകയും ശപഥം ചെയ്ത് അക്രമം ഉപേക്ഷിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഞ) രാഷ്ട്രം യത്നത്തിന്റെയും ലക്ഷ്യപ്രാപ്തിയുടെയും ഉന്നതതലങ്ങളിലേക്ക് നിരന്തരം ഉയരത്തക്കവണ്ണം വ്യക്തിപരവും കൂട്ടായതുമായ പ്രവർത്തനത്തിന്റെ എല്ലാ മണ്ഡലങ്ങളിലും ഉൽകൃഷ്ടതയ്ക്കുവേണ്ടി അധ്വാനിക്കുക.

(ട) ആറിനും പതിനാലിനും ഇടയ്ക്ക് പ്രായമുള്ള തന്റെ കുട്ടിക്കോ തന്റെ സംരക്ഷണയിലുള്ള കുട്ടികൾക്കോ, അതതു സംഗതി പോലെ, മാതാപിതാക്കളോ രക്ഷാകർത്താവോ വിദ്യാഭ്യാസത്തിനുള്ള അവസരങ്ങൾ ഏർപ്പെടുത്തുക.

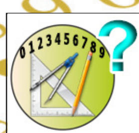
ഉള്ളടക്കം

**ഈ പുസ്തകത്തിൽ സൗകര്യത്തിനായി
ചില ചിഹ്നങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു.**


ഐ.സി.റ്റി. സാധ്യത


കണക്ക് ചെയ്തു നോക്കാം


ഗവേഷണം



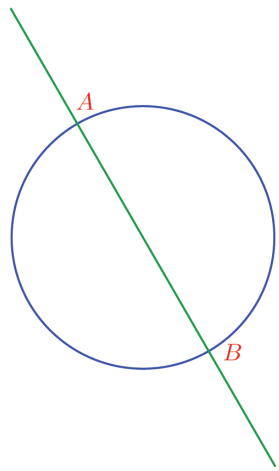
ചർച്ചചെയ്യാം


എൻ.എസ്.ക്യൂ.എഫ്.

7 തൊടുവരകൾ

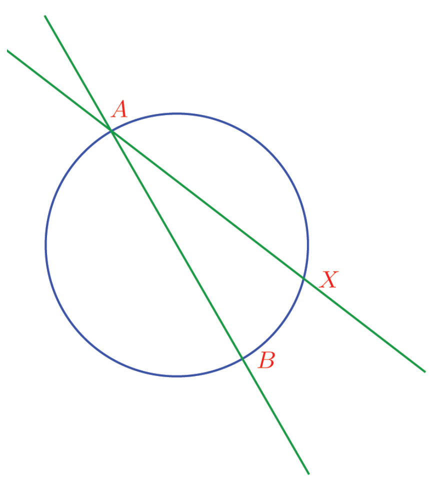
വരയും വട്ടവും

ചിത്രം നോക്കൂ:

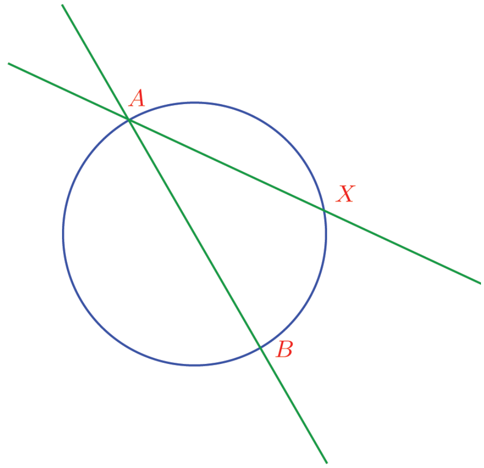


വൃത്തത്തിലെ A എന്ന ബിന്ദുവിൽക്കൂടിയുള്ള വ്യാസമാണ് AB; ഇത് ഇരുവശത്തേക്കും അൽപം നീട്ടിയിട്ടുമുണ്ട്.

A യിലൂടെ മറ്റൊരു ഞാൺ വരച്ച്, ഇതുപോലെ നീട്ടിയതാണ് ഈ ചിത്രം.

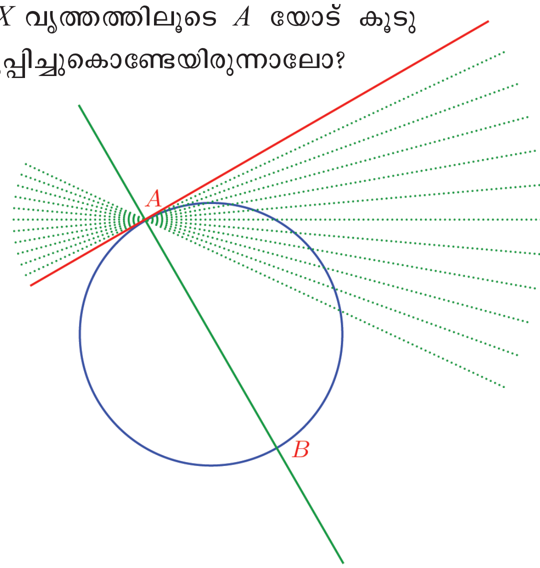


A യുടെ സ്ഥാനം മാറ്റാതെ, X അൽപംകൂടി A യോട് അടുപ്പിച്ചാലോ?



ജിയോജിബ്രയിൽ O എന്ന ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ A, X എന്നിങ്ങനെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. O, A എന്നീ ബിന്ദുക്കളും A, X എന്നീ ബിന്ദുക്കളും യോജിപ്പിച്ചുകൊണ്ട് വരകൾ വരയ്ക്കുക. X ന്റെ സ്ഥാനം A യിലേക്ക് അടുപ്പിക്കുമ്പോൾ AX എന്ന വരയ്ക്ക് എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നത്? X എന്ന ബിന്ദു A യിലെത്തുമ്പോഴോ? O, X ഇവ യോജിപ്പിക്കുക. X ന്റെ സ്ഥാനം A യിലേക്ക് അടുക്കുമ്പോൾ OAX, AOX എന്നീ കോണുകൾക്ക് എന്ത് മാറ്റമാണ് സംഭവിക്കുന്നതെന്ന് നോക്കുക.

ഇങ്ങനെ X വൃത്തത്തിലൂടെ A യോട് കൂടുതൽ അടുപ്പിച്ചുകൊണ്ടേയിരുന്നാലോ?

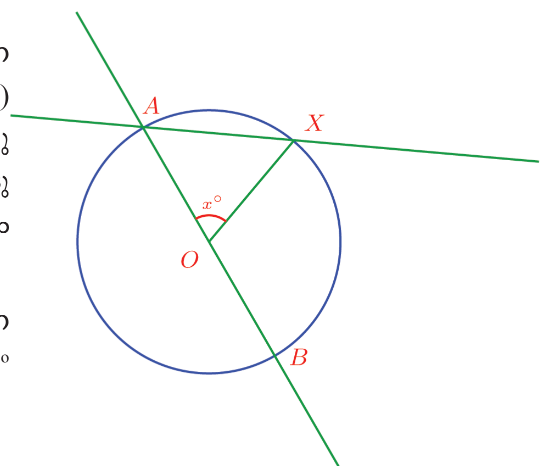


ചിത്രത്തിലെ ചുവന്ന വര, വൃത്തത്തെ A യിൽ മാത്രം ഒന്നു തൊടുന്നു. അല്ലേ?

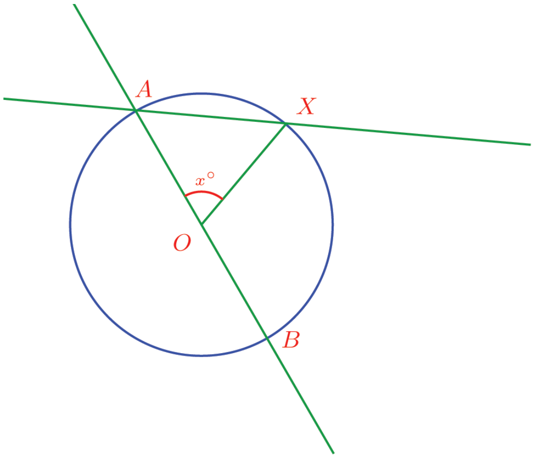
5ILH2X

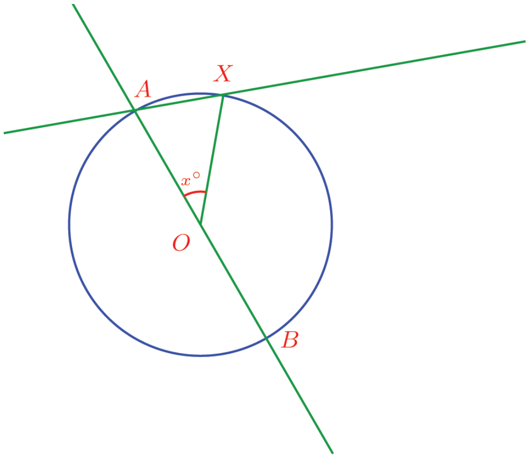
ഈ വരയെ വൃത്തത്തിലെ A എന്ന ബിന്ദുവിലെ തൊടുവര (**tangent**) എന്നാണ് പറയുന്നത്. ചിത്രം ഒന്നുകൂടി നോക്കൂ. വ്യാസവും തൊടുവരയും തമ്മിലെന്തെങ്കിലും ബന്ധം കാണുന്നുണ്ടോ?

ഇതു വ്യക്തമാകാൻ, AX എന്ന ഞാണിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ x° എന്നെടുക്കാം.



X എന്ന ബിന്ദു A യോടടുപ്പിക്കുന്തോറും AX എന്ന ഞാണിന്റെ നീളവും, അതിന്റെ കേന്ദ്രകോണും ചെറുതാകും; അയായത് x എന്ന സംഖ്യ, പൂജ്യ ത്തോടടുക്കും.

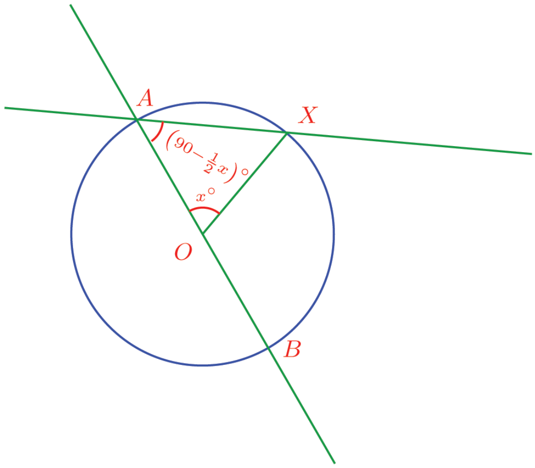




ഞാണും വ്യാസവും തമ്മിലുള്ള കോണോ? AOX സമപാർശ്വത്രികോണമായതിനാൽ, ഈ കോൺ

$$\frac{1}{2}(180-x)^\circ = \left(90-\frac{1}{2}x\right)^\circ$$

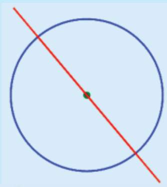
ആണ്.



X എന്ന ബിന്ദു, A എന്ന ബിന്ദുവിനോട് അടുക്കുന്തോറും, ഈ കോൺ 90° യോട് അടുത്തടുത്തു വരും. തൊടുവരയാകുമ്പോൾ, കൃത്യം 90° ആകുകയും ചെയ്യും.

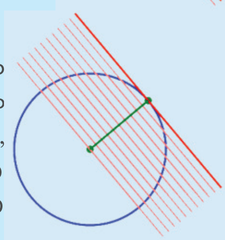
നീങ്ങുന്ന വരകൾ

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

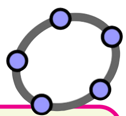


ഒരു വൃത്തവും, കേന്ദ്രത്തിലൂടെ ഒരു വരയും. വര അൽപം മുകളിലേക്കു നീക്കിയാലോ?

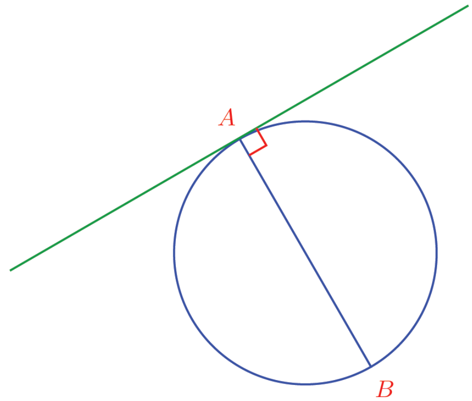
വര വീണ്ടും വീണ്ടും നീക്കിക്കൊണ്ടിരുന്നാൽ വൃത്തത്തിലെ ഒരേയൊരു ബിന്ദുവിൽക്കൂടിപ്പോകുന്ന വരയിലെത്തില്ലേ?



കേന്ദ്രവും, അവസാനം കിട്ടിയ ബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, ഈ സമാന്തരവരകൾക്കെല്ലാം ലംബമാണല്ലോ.



ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു വൃത്തവും അതിന്റെ ഒരു ആരവും വരയ്ക്കുക. ആരത്തിൽ ഒരു ബിന്ദു (Point on Object) എടുത്ത് അതിലൂടെ ആരത്തിന് ലംബം വരയ്ക്കുക. ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ. ഈ ബിന്ദു വൃത്തത്തിലെത്തുമ്പോൾ വരയ്ക്ക് എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നത്?



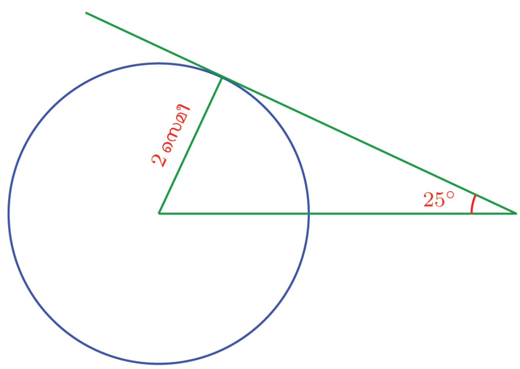
ഇത് ഒരു പൊതുതത്വമായി പറയാം.

വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള തൊടുവര, ആ ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള വ്യാസത്തിനു ലംബമാണ്.

വൃത്തത്തിന് തൊടുവര വരയ്ക്കാൻ ജിയോജിബ്രയിലെ Tangents എടുത്ത് വൃത്തത്തിലും തൊടുവര കടന്നുപോകേണ്ട ബിന്ദുവിലും ക്ലിക്ക് ചെയ്താൽ മതി. ബിന്ദു വൃത്തത്തിലാണെങ്കിൽ ഒരു തൊടുവര ലഭിക്കുമല്ലോ. വൃത്തത്തിന് പുറത്താണെങ്കിലോ?

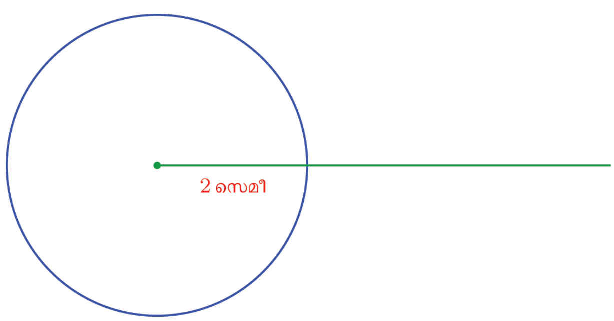
വൃത്തത്തിന് അതിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ തൊടുവര വരച്ച് അതിന്റെ Trace On നൽകുക. തൊടുവര വരച്ച ബിന്ദുവിന് Animation നൽകി നോക്കൂ.

ഇതുപയോഗിച്ചുള്ള ചില കണക്കുകൾ നോക്കാം; ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ മുകളിലെ വര, വൃത്തത്തിന്റെ തൊടുവരയാണ്.



ഈ ചിത്രം നോട്ടുബുക്കിൽ വരയ്ക്കാമോ?

ആദ്യം 2 സെന്റിമീറ്റർ ആരത്തിൽ വൃത്തം വരയ്ക്കാം. കേന്ദ്രത്തിലൂടെ വിലങ്ങനെ ഒരു വരയും വരയ്ക്കാം.



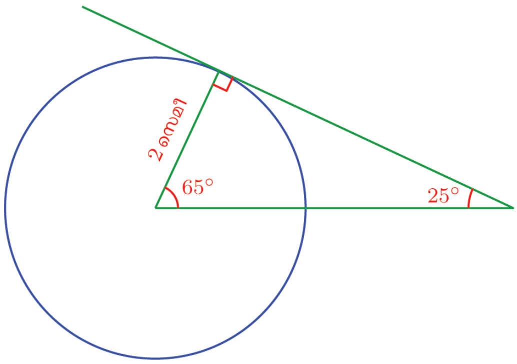
ഈ വരയുമായി 25° കോൺ ഉണ്ടാക്കുന്ന വരയാണ് വേണ്ടത്. വരയിലെ ഏതെങ്കിലും സ്ഥാനത്തുനിന്നും 25° ചരിവിൽ വരച്ചാൽ അത് തൊടുവരയാകണമെന്നില്ലല്ലോ.

അപ്പോൾ മറിച്ചാലോചിക്കാം. വൃത്തത്തിലെ ഏതു ബിന്ദുവിലൂടെ തൊടുവര വരയ്ക്കണം? അത് ആദ്യത്തെ വരയെ 25° ചരിവിൽ കൂട്ടിമുട്ടണമല്ലോ.

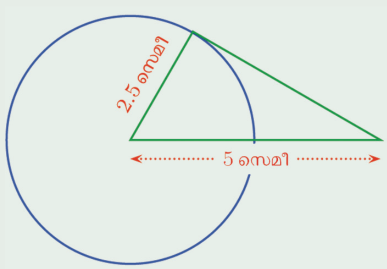
ആദ്യത്തെ ചിത്രം ഒന്നുകൂടി നോക്കൂ. അതിലെ ത്രികോണത്തിന്റെ മുകളിലത്തെ കോൺ മട്ടമാണ്, മറ്റൊരു കോൺ 25° യും.

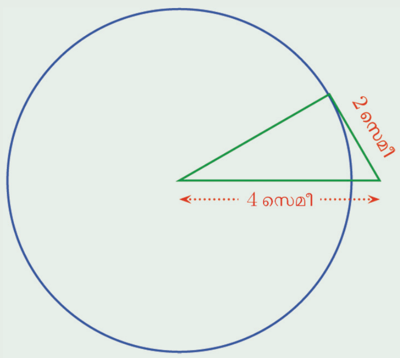
അപ്പോൾ മൂന്നാമത്തെ കോൺ 65°.

ഇനി ചിത്രം മുഴുവനാക്കാമല്ലോ.



(1) ചുവടെയുള്ള രണ്ടു ചിത്രത്തിലും വൃത്തത്തിലെ ഒരു തൊടുവരയും, തൊടുന്ന ബിന്ദുവിലേയ്ക്കുള്ള ആരവും കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നുള്ള മറ്റൊരു വരയും ചേർത്ത് ത്രികോണം വരച്ചിരിക്കുന്നു.

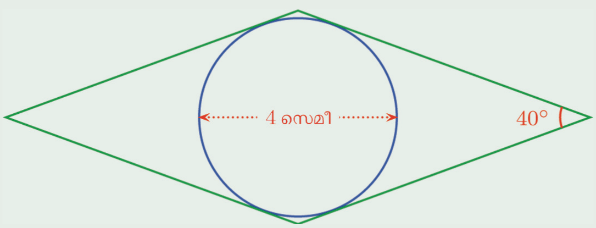




ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോട്ടുബുക്കിൽ വരയ്ക്കുക.

(2) ചിത്രത്തിലെ സമഭുജ സാമാന്തരികത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം വൃത്തത്തിന്റെ തൊടുവരകളാണ്.

ഈ ചിത്രം നോട്ടുബുക്കിൽ വരയ്ക്കുക.

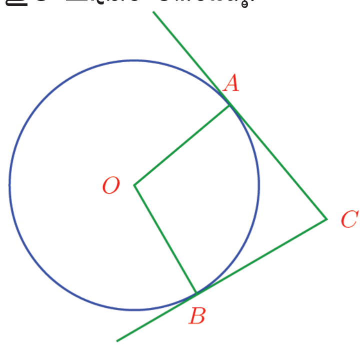


(3) ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസത്തിന്റെ രണ്ടറ്റങ്ങളിൽ വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരകൾ സമാന്തരമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(4) ഒരു വൃത്തത്തിലെ പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ടു വ്യാസങ്ങളുടെ അറ്റങ്ങളിൽ വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരകൾ ചേർന്നുണ്ടാകുന്നത് ഏതുതരം ചതുർഭുജമാണ്?

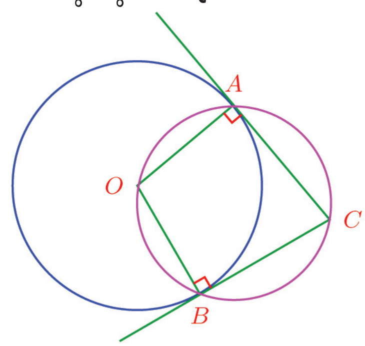
തൊടുവരകളും കോണുകളും

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



O കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിലെ A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള തൊടുവരകൾ, C എന്ന ബിന്ദുവിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു.

$OACB$ എന്ന ചതുർഭുജത്തിൽ A, B എന്നീ എതിർമൂലകളിലെ കോണുകൾ മട്ടമാണ്; അതിനാൽ, അവയുടെ തുക 180°. അപ്പോൾ ഈ ചതുർഭുജം ചക്രീയമാണ്.



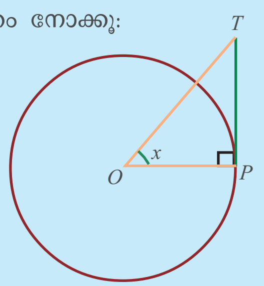
5IVD4K

പേരുവിവരം

തൊടുക എന്നർഥമുള്ള tangere എന്ന ലാറ്റിൻ വാക്കിൽനിന്നാണ്, തൊടുവരയ്ക്ക് ഇംഗ്ലീഷിൽ tangent എന്ന പേരു വന്നത്.

ത്രികോണമിതിയിലെ tan എന്ന അളവിന്റെയും മുഴുവൻ പേര് tangent എന്നു തന്നെയാണല്ലോ. എന്താണ് ഇതിന് തൊടുവരയുമായുള്ള ബന്ധം?

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

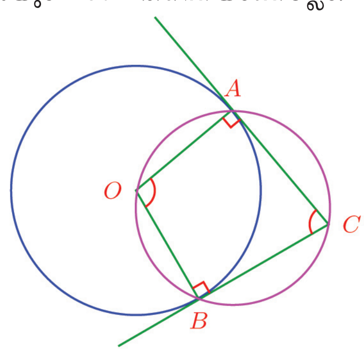


വൃത്തത്തിന്റെ ആരം 1 എന്നെടുത്താൽ, PT എന്ന തൊടുവരയുടെ നീളം $\tan x$ തന്നെയല്ലേ?

അതായത്,

ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും, അതിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളും, ഈ ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള തൊടുവരകൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവും മൂലകളായ ചതുർഭുജം ചക്രീയമാണ്.

ഇത്തരമൊരു ചതുർഭുജത്തിലെ മറ്റു രണ്ടു കോണുകളുടെ തുകയും 180° തന്നെയാണല്ലോ.

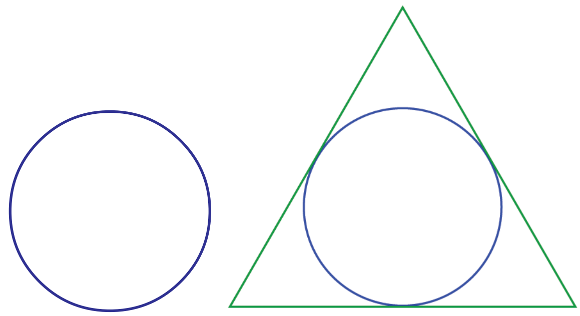


ഇതും ഒരു പൊതുതത്വമായി പറയാം.

ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള ആരങ്ങൾ ചേരുന്ന കോണും, ഈ ബിന്ദുക്കളിലെ തൊടുവരകൾ ചേരുന്ന കോണും അനുപൂരകമാണ്.

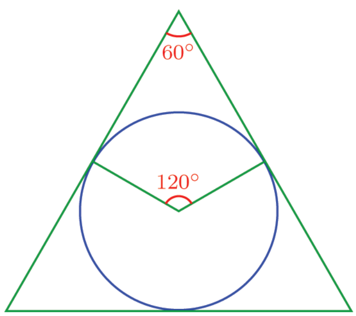
5J5968

ഇവ ഉപയോഗിച്ച് വരയ്ക്കാവുന്ന ചില ചിത്രങ്ങൾ നോക്കാം. ഒരു വൃത്തത്തെ കൃത്യമായി പൊതിഞ്ഞു നിൽക്കുന്ന സമഭുജത്രികോണം വരയ്ക്കണം.

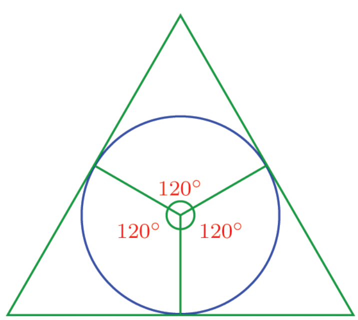


ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ വൃത്തത്തിന്റെ തൊടുവരകളാകണമല്ലോ. ത്രികോണം സമഭുജമായതിനാൽ, ഇവ ചേരുന്ന കോൺ 60°.

ഇവ വൃത്തത്തെ തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള ആരങ്ങൾ ചേരുന്ന കോണോ?

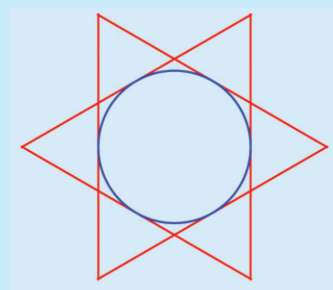


ഇതുപോലെ, ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ വൃത്തത്തെ തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള ആരങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള കോണുകളെല്ലാം 120° ആണെന്നു കാണാം.

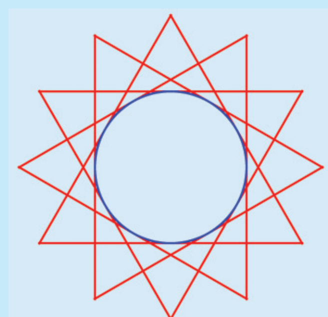


വരകൾകൊണ്ടൊരു വൃത്തം

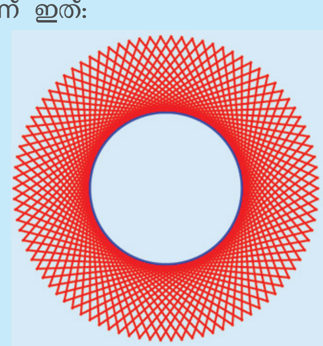
ചിത്രത്തിൽ ഒരു വൃത്തത്തിലെ ആറു ബിന്ദുക്കളിൽ തൊടുവരകൾ വരച്ച്, ഒരു നക്ഷത്രമുണ്ടാക്കിയിരിക്കുന്നു.



വരകളുടെ എണ്ണം 12 ആക്കിയാലോ?



കമ്പ്യൂട്ടർ ഉപയോഗിച്ച്, 90 വരകൾ വരച്ച ചിത്രമാണ് ഇത്:

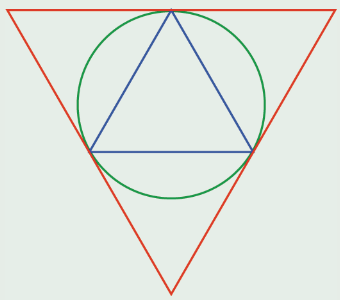


അപ്പോൾ, വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ 120° ഇടവിട്ടു മൂന്ന് ആരങ്ങൾ വരച്ച്, അവയുടെ അറ്റങ്ങളിലൂടെ തൊടുവരകൾ വരച്ചാൽ നമുക്കുവേണ്ട ത്രികോണമായി.

3 സെന്റിമീറ്റർ ആരത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരച്ച്, ഇങ്ങനെയൊരു സമഭുജത്രികോണം വരച്ചു നോക്കൂ.

(1) ആരം 2.5 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. വശങ്ങളെല്ലാം ഈ വൃത്തത്തെ തൊടുന്നതും കോണുകൾ 40°, 60°, 80° യും ആയ ത്രികോണം വരയ്ക്കുക.

(2) തന്നിരിക്കുന്ന ചിത്രത്തിലെ ചെറിയ (നീല) ത്രികോണം സമഭുജമാണ്. അതിന്റെ മൂലകളിലൂടെ പരിവൃത്തത്തിനു വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരകളാണ് വലിയ (ചുവന്ന) ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ.

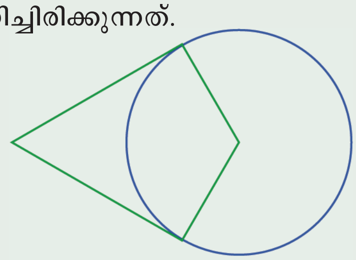


i) വലിയ ത്രികോണം സമഭുജമാണെന്നും, അതിന്റെ വശങ്ങൾ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ രണ്ടു മടങ്ങാണെന്നും തെളിയിക്കുക.

ii) ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം 3 സെന്റിമീറ്റർ ആയി ഈ ചിത്രം വരയ്ക്കുക.

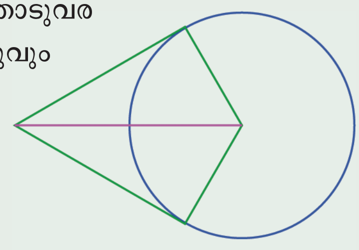
ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. Angle with Given Size ഉപയോഗിച്ച് ഈ ബിന്ദുവിലും വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലും ക്രമമായി ക്ലിക്കുചെയ്ത് കോണളവ് 120° എന്നു കൊടുത്താൽ വൃത്തത്തിൽ മറ്റൊരു ബിന്ദു കിട്ടും. ഈ ബിന്ദുവിലും കേന്ദ്രത്തിലും ക്ലിക്കുചെയ്ത് 120° എന്നു കൊടുത്താൽ ഒരു ബിന്ദു കൂടി വൃത്തത്തിൽ ലഭിക്കും. ഈ മൂന്നു ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടിയും വൃത്തത്തിനു തൊടുവരകൾ വരച്ച് അവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. Segment ഉപയോഗിച്ച് ഈ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച് ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. ഇനി തൊടുവരകൾ മറച്ചുവയ്ക്കാം. ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്ക് Trace on നൽകിയശേഷം വൃത്തത്തിൽ ആദ്യമെടുത്ത ബിന്ദുവിന് Animation നൽകി നോക്കൂ.

(3) ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ രണ്ടു തൊടുവരകളും, തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള ആരങ്ങളുമാണ് ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.

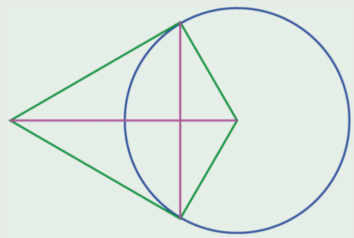


i) തൊടുവരകളുടെ നീളം തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ii) വൃത്തകേന്ദ്രവും, തൊടുവരകൾ ചേരുന്ന ബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, ആരങ്ങൾക്കിടയിലെ കോണിന്റെ സമഭാജിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.



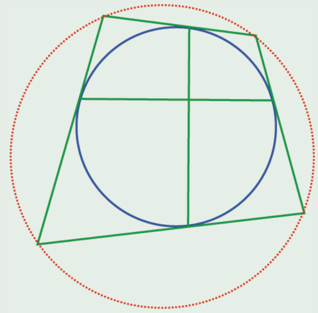
iii) തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന ഞാണിന്റെ ലംബസമഭാജിയാണ് ഈ വര എന്ന് തെളിയിക്കുക.



(4) ഒരു വൃത്തത്തിലെ പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ടു ഞാണുകളുടെ അറ്റങ്ങളിലൂടെയുള്ള തൊടുവരകൾ വശങ്ങളായ ചതുർഭുജം ചക്രീയമാണെന്നു തെളിയിക്കുക. (**വൃത്തങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ **ഞാണും കോണും ചാപവും** എന്ന ഭാഗത്തിലെ കണക്ക് (7) നോക്കുക)

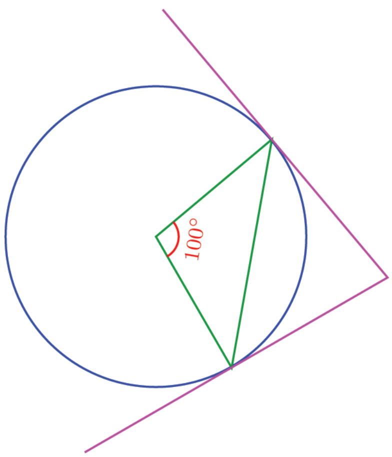
ഇതിലെ ഒരു ഞാൺ വ്യാസമായാൽ ഏതു തരം ചതുർഭുജമാണ് കിട്ടുന്നത്? രണ്ടു ഞാണും വ്യാസമായാലോ?

5JE57V

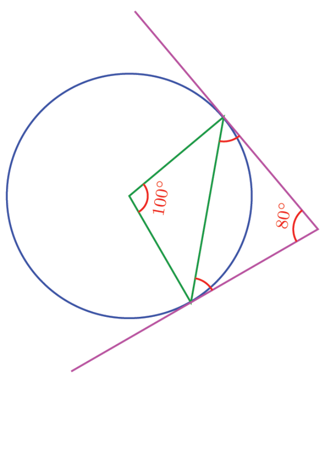


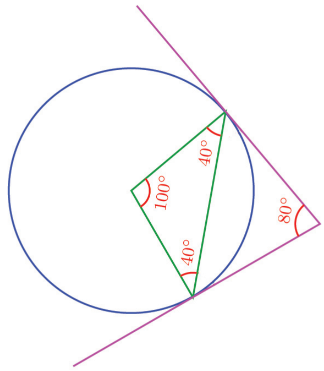
ഞാണും തൊടുവരയും

വൃത്തത്തിലെ ഒരു ഞാണിന്റെ രണ്ടറ്റത്തുമുള്ള തൊടുവരകളാണ് ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.



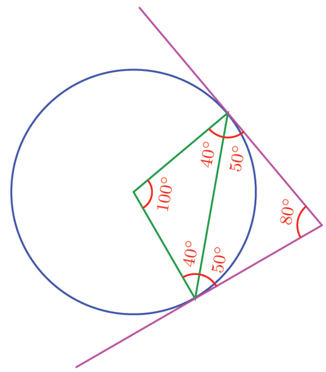
ഇതിൽ, തൊടുവരകൾ ചേരുന്ന കോൺ 80° ആണെന്നറിയാം. ഞാണും തൊടുവരകളും തമ്മിലുള്ള കോണുകളോ?





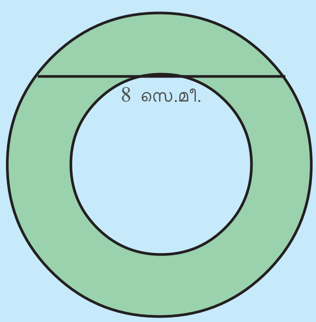
ചിത്രത്തിലെ പച്ച ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങൾ തുല്യമായതിനാൽ അവയ്ക്കെതിരെയുള്ള കോണുകളും തുല്യമാണ്. ഇവയുടെ തുക $180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$. അപ്പോൾ ഓരോന്നും 40°.

ആരവും തൊടുവരയും തമ്മിലുള്ള കോൺ 90° ആണല്ലോ; അപ്പോൾ ഞാണും തൊടുവരയുമായുള്ള കോൺ $90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$



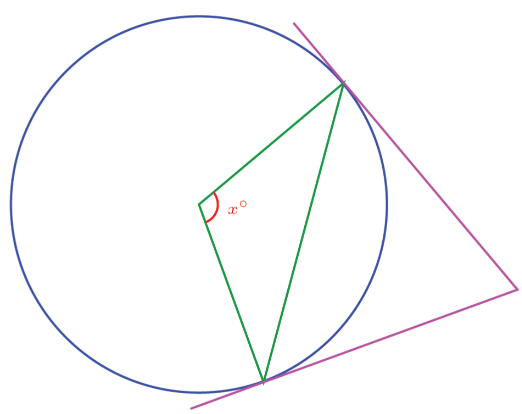
പരപ്പളവ് പ്രശ്നം

ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ, പച്ച ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?



ഇത്, ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണിന്റെ പകുതിയാണല്ലോ?

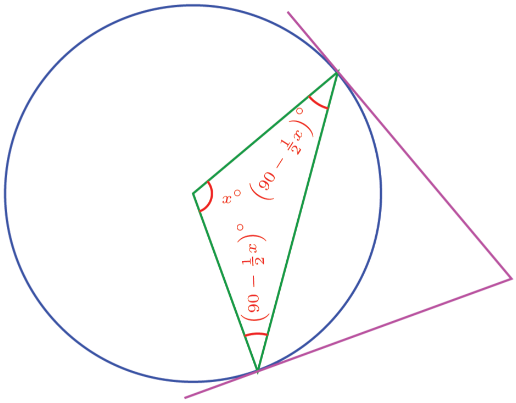
ഏതു ചാപത്തിനും ഇതു ശരിയാണോ? ഇതു പരിശോധിക്കാൻ, ഞാണിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ x° എന്നെടുത്തുനോക്കാം.

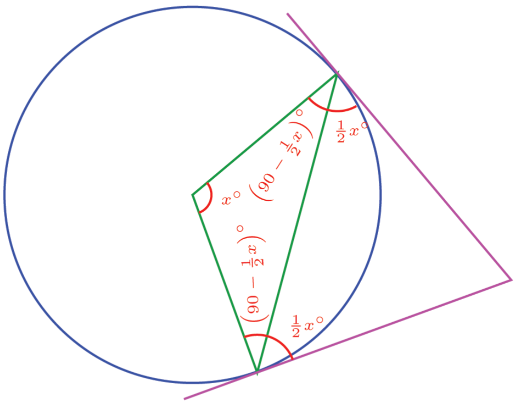


അപ്പോൾ പച്ച ത്രികോണത്തിലെ മറ്റു രണ്ടു കോണുകൾ

$$\frac{1}{2}(180 - x)^{\circ} = \left(90 - \frac{1}{2}x\right)^{\circ}$$

തൊടുവരയും ആരവും തമ്മിലുള്ള കോൺ 90° ആയതിനാൽ, ഇനി തൊടുവരയും ഞാണും തമ്മിലുള്ള കോൺ $\frac{1}{2}x^{\circ}$ എന്നു കാണാമല്ലോ.

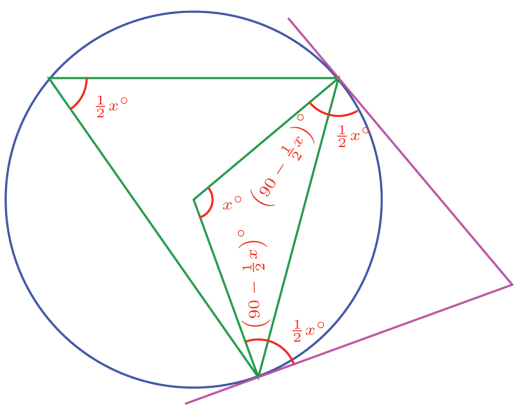




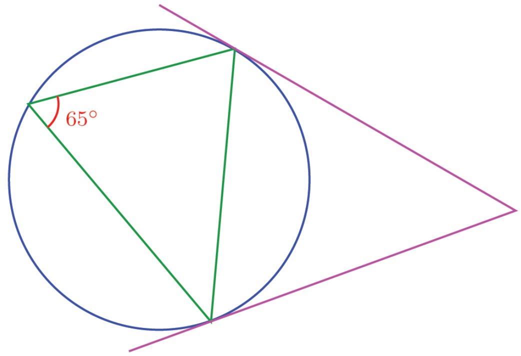
ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ ഒരു ഞാണും, ഞാണിന്റെ രണ്ട് അറ്റങ്ങളിലൂടെയുള്ള തൊടുവരകളും വരയ്ക്കുക. ഞാണിന്റെ കേന്ദ്രകോണും, ഞാൺ തൊടുവരയുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണും അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ കോണുകൾ തമ്മിൽ എന്താണ് ബന്ധം? പല ഞാണുകൾ വരച്ചു നോക്കൂ.

വൃത്തത്തിലെ ഒരു ഞാണിന്റെ രണ്ടറ്റങ്ങളിലൂടെയുള്ള തൊടുവരകൾ ഞാണുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ, ഞാണിന്റെ കേന്ദ്രകോണിന്റെ പകുതിയാണ്.

വൃത്തത്തിന്റെ വലിയ ഭാഗത്ത് ഞാണുണ്ടാക്കുന്ന കോണും കേന്ദ്രകോണിന്റെ പകുതിയാണല്ലോ. (**വൃത്തങ്ങൾ** എന്ന പാഠഭാഗം)

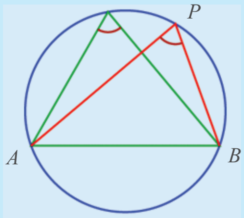


അപ്പോൾ ഈ ചിത്രത്തിൽ തൊടുവരകൾ ഞാണുമായുണ്ടാക്കുന്ന കോൺ എന്താണ്?

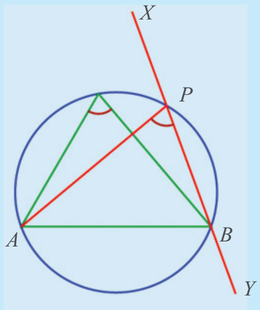


മാറാത്ത കോൺ

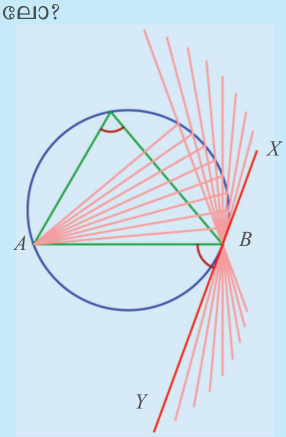
ഒരേ വൃത്തഭാഗത്തിലെ കോണുകൾ തുല്യമാണെന്നു കണ്ടല്ലോ:



PB അൽപം നീട്ടി വരയ്ക്കാം:

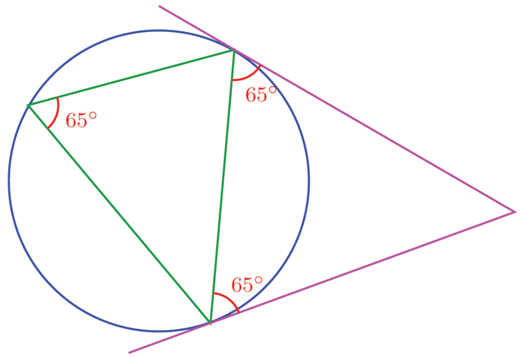


ഇനി P വൃത്തത്തിലൂടെ നീങ്ങി, B യിലെത്തിയാലോ?

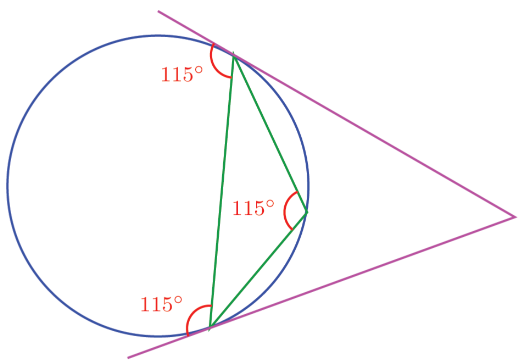


XY എന്ന വര B യിലെ തൊടുവരയാകും; കോണൊട്ടു മാറുന്നുമില്ല.

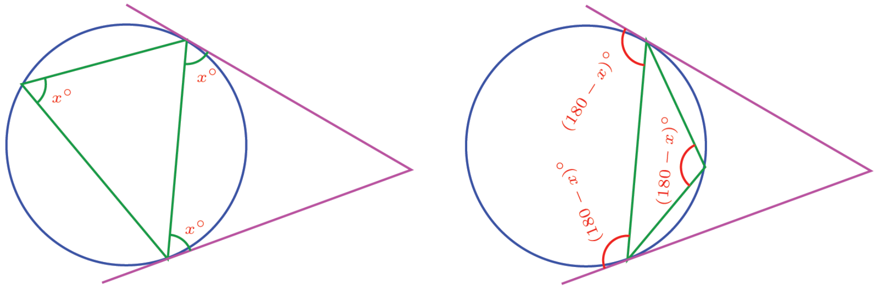
വലതുവശത്തെ കോണുകൾ 65° തന്നെ



തൊടുവരകൾ ഞാണിന്റെ ഇടതുവശത്ത് ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകൾ $180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$. ഇത്, വൃത്തത്തിന്റെ ചെറിയ ഭാഗത്ത് ഞാണുണ്ടാക്കുന്ന കോൺ തന്നെയല്ലേ?



അപ്പോൾ, ഞാൺ അതിന്റെ അറ്റങ്ങളിലെ തൊടുവരകളുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകളും, വൃത്തത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന കോണുകളും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ഇങ്ങനെ വരച്ചു കാണിക്കാം.

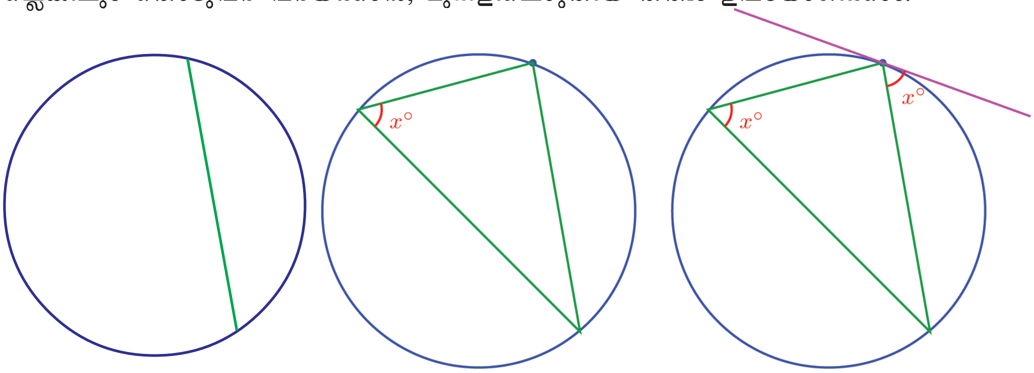


5JN19I

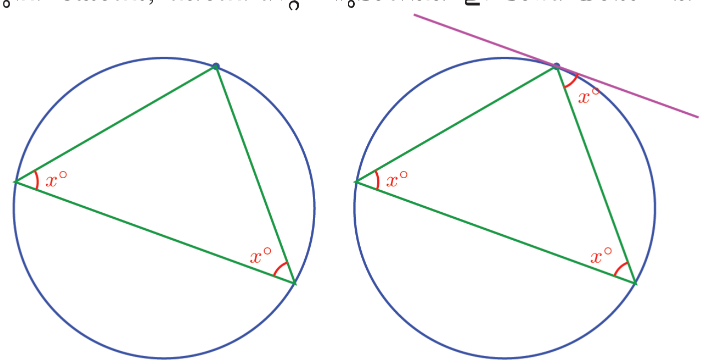
ഇങ്ങനെ എഴുതുകയും ചെയ്യാം.

വൃത്തത്തിലെ ഒരു ഞാൺ അതിന്റെ അറ്റത്തുള്ള തൊടുവരയുമായി ഒരു വശത്ത് ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ, മറുവശത്തുള്ള വൃത്തഭാഗത്ത് ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണിനു തുല്യമാണ്.

വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിലൂടെ തൊടുവര വരയ്ക്കുന്നത്, ഈ ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള വ്യാസത്തിന് ലംബം വരച്ചാണല്ലോ. കേന്ദ്രം അറിയില്ലെങ്കിലും തൊടുവര വരയ്ക്കാൻ, മുകളിലെഴുതിയ തത്വം ഉപയോഗിക്കാം.



ബിന്ദുവിലൂടെ ഒരു ഞാൺ വരച്ച്, അത് വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു ഭാഗത്തുണ്ടാക്കുന്ന കോൺ, ഞാണിന്റെ മറുഭാഗത്ത് ഉണ്ടാക്കിയാൽ മതി.



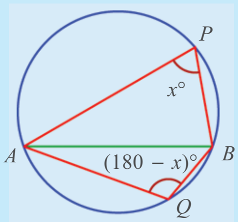
ത്രികോണം സമപാർശ്വമായി വരച്ചാൽ, താഴത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരമായി ബിന്ദുവിലൂടെ ഒരു വര വരച്ചാൽ മതി.

അപ്പോൾ ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഏതെങ്കിലും ബിന്ദുവിലൂടെ തൊടുവര വരയ്ക്കാൻ, ആദ്യം ഈ ബിന്ദു കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തചാപം വരച്ച്, അത് ആദ്യത്തെ വൃത്തത്തെ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുക.

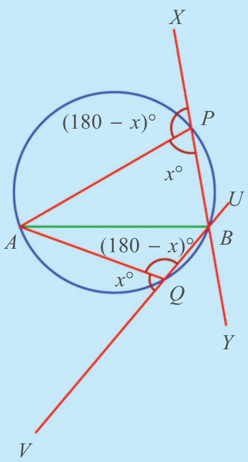
ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. വൃത്തത്തിലെ A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ തൊടുവര വരച്ച് തൊടുവരയും ഞാണും തമ്മിലുള്ള കോണുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. വൃത്തത്തിൽ ഒരു ബിന്ദു C അടയാളപ്പെടുത്തി AC, BC ഇവ വരച്ച് $\angle ACB$ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ കോണുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ്? A, B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ.

മറിയുന്ന കോണുകൾ

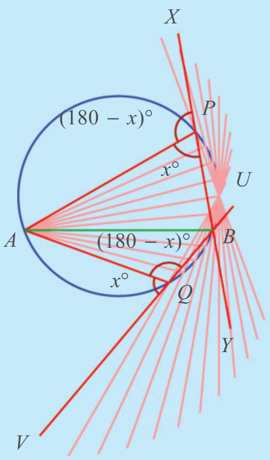
വൃത്തത്തിലെ ഇരുഭാഗങ്ങളിലുള്ള കോണുകൾ അനുപൂരകമാണല്ലോ:



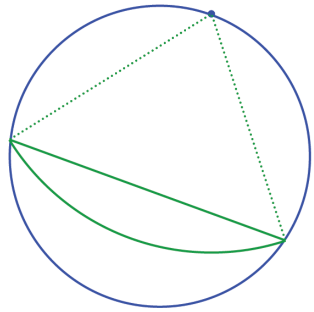
നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ വരകൾ നീട്ടിവരയ്ക്കാം,



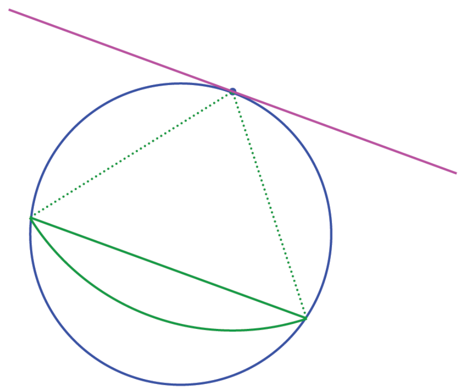
P വൃത്തത്തിലൂടെ Q വിലേക്കു നീങ്ങിയാലോ?



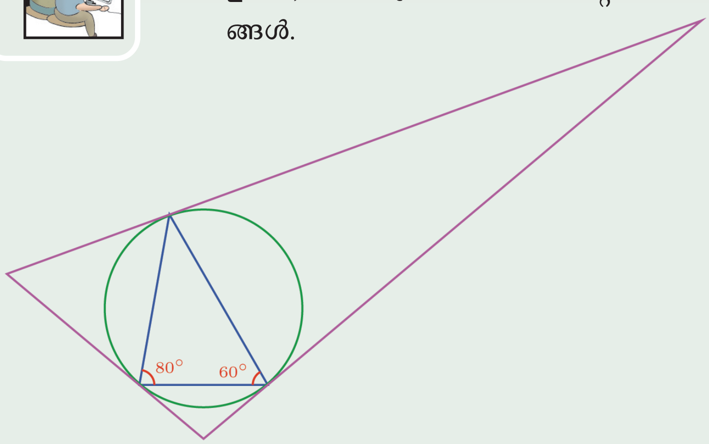
AP യുടെ താഴെ x° യും, മുകളിൽ $(180 - x)^\circ$ ഉം ആണ്. ചലനത്തിലുട നീളം അങ്ങനെതന്നെയല്ലേ?



ഇനി തൊടുവര വരയ്ക്കേണ്ട ബിന്ദുവിലൂടെ, ഈ വരയ്ക്ക് സമാന്തരമായ വര വരച്ചാൽ മതി.



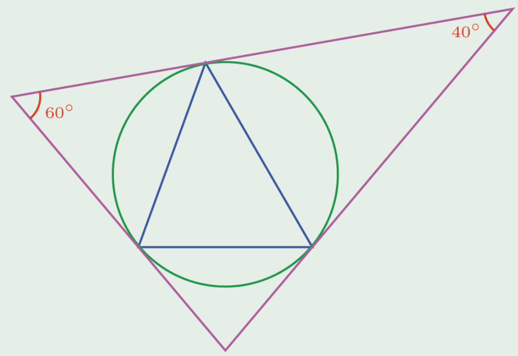
(1) ചിത്രത്തിലെ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളിലൂടെ പരിവൃത്തത്തിനു വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരകളാണ്, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ.



വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ കണക്കാക്കുക.

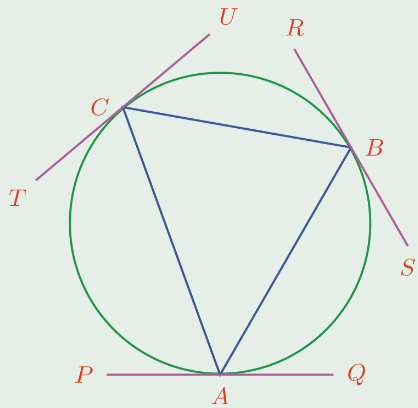
(2) ചിത്രത്തിലെ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളിലൂടെ പരിവൃത്തത്തിനു വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരകളാണ്, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ.

ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ കണക്കാക്കുക.



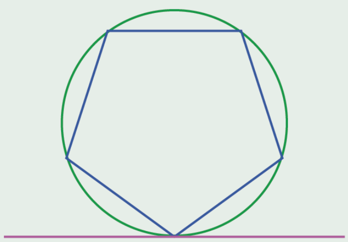
(3) ചിത്രത്തിൽ, ABC എന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളിലൂടെ പരിവൃത്തത്തിനു വരച്ച തൊടുവരകളാണ് PQ, RS, TU എന്നീ വരകൾ.

ചിത്രത്തിലെ തുല്യമായ കോണുകൾ തരംതിരിച്ച് എഴുതുക.



(4) ചിത്രത്തിൽ സമപഞ്ചഭുജത്തിന്റെ ഒരു മൂലയിൽക്കൂടി അതിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന് തൊടുവര വരച്ചിരിക്കുന്നു.

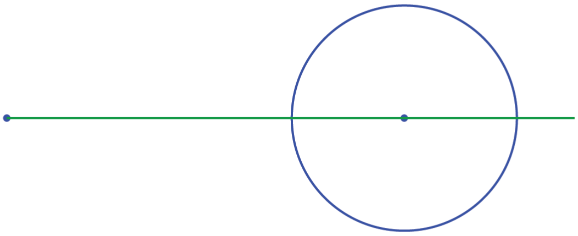
തൊടുവരയും, തൊടുന്ന ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള പഞ്ചഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളും തമ്മിലുള്ള കോണുകൾ കണക്കാക്കുക.



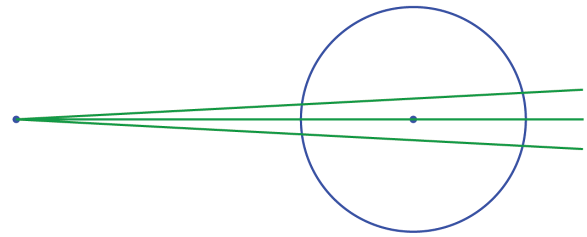
പുറത്തുനിന്നും തൊടുവര

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.

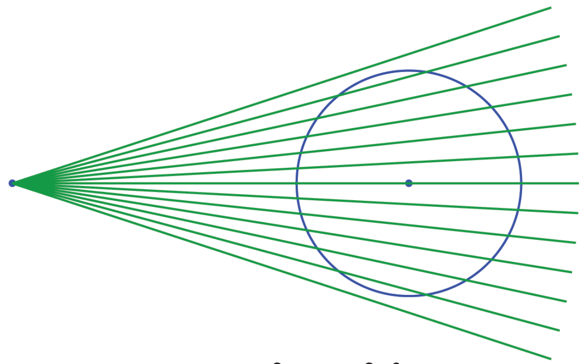
വൃത്തത്തിനു പുറത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദു വൃത്തകേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിച്ച് നീട്ടി വരച്ചിരിക്കുന്നു. അത് വൃത്തത്തെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ മുറിച്ചു കടക്കുന്നു. ഈ ബിന്ദുക്കൾ, ഒരു വ്യാസത്തിന്റെ അറ്റങ്ങളുമാണ്.



വൃത്തത്തിനു പുറത്തുള്ള ഈ ബിന്ദുതന്നെ, വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ കേന്ദ്രത്തിനൽപം മുകളിലോ താഴെയോ ആയ ഓരോ ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചു വരച്ചാലോ?

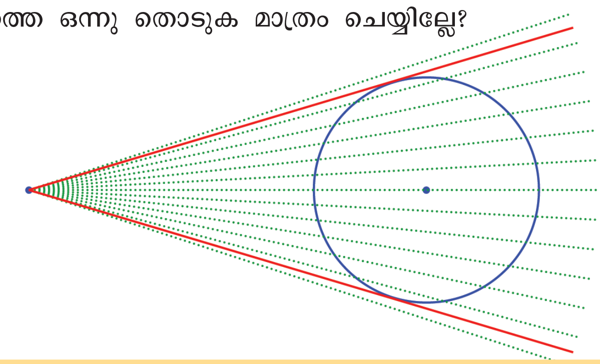


വര വൃത്തത്തെ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ അൽപംകൂടി അടുത്തു. ഇങ്ങനെ തുടർന്നാലോ?



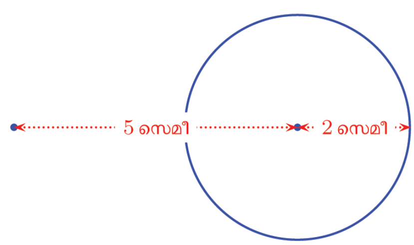
അടുത്തടുത്തുവരുന്ന രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ വൃത്തത്തെ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന വരകൾക്ക്, ഒരു ഘട്ടം കഴിയുമ്പോൾ വൃത്തവുമായി ഒരു ബന്ധവുമില്ലാതാകുന്നു.

പക്ഷെ അതിനിടയിലെവിടെയോ, മുകളിലും താഴെയുമായി രണ്ടു വരകൾ വൃത്തത്തെ ഒന്നു തൊടുക മാത്രം ചെയ്യില്ലേ?



ഒരു വൃത്തത്തിനു പുറത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് വൃത്തത്തിലേക്ക് രണ്ടു തൊടുവരകൾ വരയ്ക്കാം.

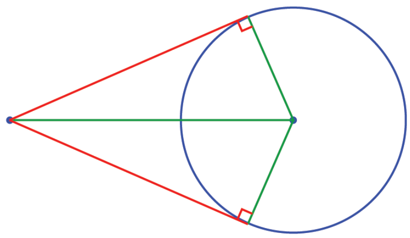
വരയ്ക്കാമെന്നു പറഞ്ഞതല്ലാതെ ഇങ്ങനെ ഒരു ജോടി തൊടുവരകൾ എങ്ങനെ വരയ്ക്കാമെന്നു പറഞ്ഞില്ലല്ലോ. ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.



ആരം 2 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് 5 സെന്റിമീറ്റർ അകലെ ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്.

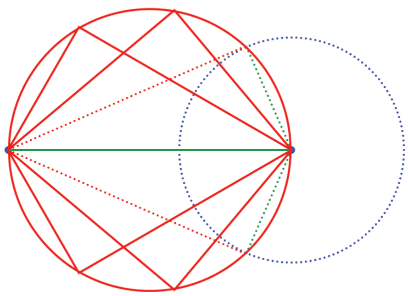
ഈ ബിന്ദുവിൽനിന്ന് വൃത്തത്തിന് രണ്ടു തൊടുവരകൾ വരയ്ക്കുന്ന തെങ്ങനെ?

വരച്ചുകഴിഞ്ഞാൽ എങ്ങനെയായിരിക്കുമെന്ന് ആലോചിച്ചാൽ, വരയ്ക്കാനുള്ള വഴി ഒരു പക്ഷെ തെളിഞ്ഞു വരും.



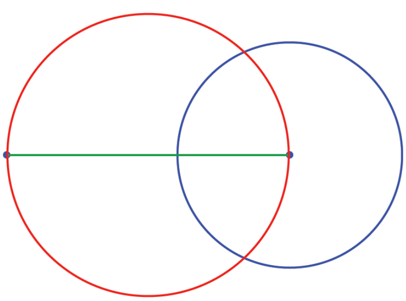
പുറത്തുനിന്നുള്ള ബിന്ദുവിൽനിന്നും, വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ടു ജോടി വരകളാണ് വേണ്ടത്.

ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കുന്ന ലംബജോടികളെല്ലാം കൂട്ടിമുട്ടുന്നത് പുറത്തെ ബിന്ദുവും വൃത്തകേന്ദ്രവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വര വ്യാസമായ വൃത്തത്തിലാണെന്ന് **വൃത്തങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടല്ലോ.



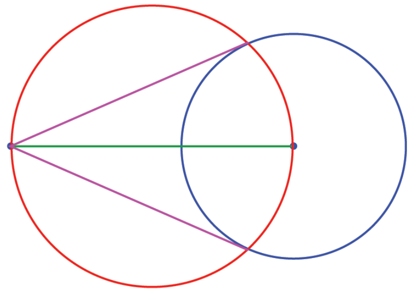
നമുക്കു വേണ്ട ലംബജോടിയിൽ, ഒരു വര ആദ്യവൃത്തത്തിന്റെ ആരം തന്നെയാകണം. അതായത്, വരകൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്നത് ആദ്യ വൃത്തത്തിലാകണം. അതിന് പഴയ വൃത്തവും പുതിയ വൃത്തവും മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ഒരു ബിന്ദുവിലൂടെ വരച്ചാൽപ്പോരെ?

ഇനി വരയ്ക്കാമല്ലോ: ആദ്യം, പുറത്തെ ബിന്ദുവും വൃത്തകേന്ദ്രവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വര വ്യാസമായി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

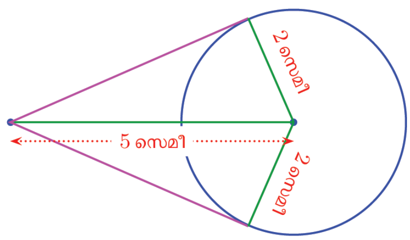


O എന്ന ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി ഒരു വൃത്തം ജിയോജിബ്രയിൽ വരച്ച് അതിൽ A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ വൃത്തത്തിന് തൊടുവരകൾ വരച്ച് അവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു C അടയാളപ്പെടുത്തുക. ചതുർഭുജം OACB വരച്ചു നോക്കൂ. ഇത് ചക്രീയമാണോ? Circle through Three Points ഉപയോഗിച്ച് O, A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തം വരച്ചു നോക്കാം. A, B ഇവയുടെ സ്ഥാനം മാറ്റിനോക്കൂ. ഇവ അടുത്തടുത്തു വരുമ്പോൾ C യ്ക്ക് എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നത്? അകന്നു പോകുമ്പോഴോ? ഈ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു വ്യാസത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കളാകുമ്പോൾ എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നത്?

ഈ വൃത്തവും ആദ്യവൃത്തവും മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ, പുറത്തെ ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ നമുക്കു വേണ്ട തൊടുവരകളായി.



നമ്മുടെ കണക്കിൽ, വൃത്തത്തിന്റെ ആരം 2 സെന്റിമീറ്ററും, പുറത്തെ ബിന്ദു വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് 5 സെന്റിമീറ്റർ അകലെയുമാണല്ലോ.



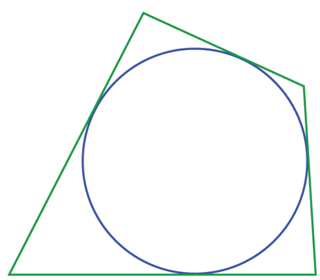
അപ്പോൾ, പൈഥാഗറസ് സിദ്ധാന്തമുപയോഗിച്ച്, തൊടുവരകളുടെ നീളം കണക്കാക്കാം.

$$\sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21} \text{ സെ.മീ.}$$

വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിലൂടെ തൊടുവരകൾ വരച്ചാൽ, തൊടുന്ന ബിന്ദു മുതൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവരെയുള്ള തൊടുവരയുടെ നീളം തുല്യമാണെന്ന് നേരത്തെ കണ്ടതാണ്. അതിനി ഇങ്ങനെയും പറയാം.

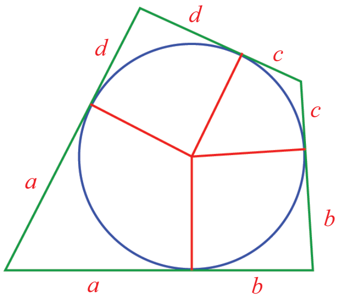
ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്നും വൃത്തത്തിലേക്ക് വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണ്.

ഇതുപയോഗിച്ചൊരു കണക്കു നോക്കാം. ചിത്രത്തിൽ ഒരു വൃത്തത്തിലെ നാലു ബിന്ദുക്കളിലെ തൊടുവരകൾ വശങ്ങളായി ഒരു ചതുർഭുജം വരച്ചിരിക്കുന്നു.



വൃത്തകേന്ദ്രവും, ഈ ബിന്ദുക്കളും യോജിപ്പിച്ചാലോ?

മൂലകളിൽ നിന്നുള്ള തൊടുവരകളുടെ നീളം a, b, c, d എന്നെടുത്താൽ ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു പോലെ ഈ നീളങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്താം.



ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ നാലു ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ നാലു ബിന്ദുക്കളിലൂടെയും വൃത്തത്തിന് തൊടുവരകൾ വരച്ച് അവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ ബിന്ദുക്കൾ മൂലകളായി വരുന്ന ചതുർഭുജം വരയ്ക്കുക. ഇനി തൊടുവരകൾ മറച്ചുവയ്ക്കാം. ചതുർഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം അടയാളപ്പെടുത്തി അവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം നിരീക്ഷിക്കുക. വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ.

അപ്പോൾ ചതുർഭുജത്തിന്റെ താഴത്തെയും മുകളിലെയും വശങ്ങളുടെ തുക $(a + b) + (c + d)$. ഇടതും വലതും വശങ്ങളുടെ തുകയോ?

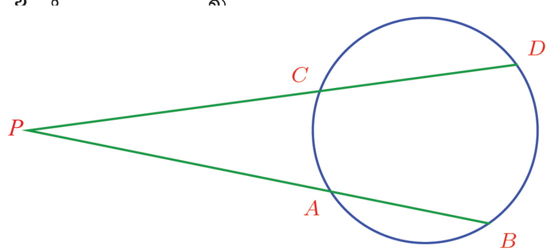
$(a + d) + (b + c)$ രണ്ടു തുകയും $a + b + c + d$ തന്നെ; അതായത്,

ഒരു വൃത്തത്തിലെ നാലു ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള തൊടുവരകൾ ചേർന്നുണ്ടാകുന്ന ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർവശങ്ങളുടെ തുക തുല്യമാണ്.

വൃത്തത്തിലെ നാലു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചു വരയ്ക്കുന്ന ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർകോണുകളുടെ തുക തുല്യമാണെന്നു നേരത്തെ കണ്ടത് ഓർക്കുക.

ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർവശങ്ങളുടെ തുക തുല്യമാണെങ്കിൽ ആ നാല് വശങ്ങളും തൊടുവരകളാകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ പറ്റുമോ?

ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് വൃത്തത്തിലേക്കു വരയ്ക്കുന്ന വരകളിൽ, വൃത്തത്തെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ മാത്രം തൊടുന്ന വരകൾ തുല്യമാണെന്നു കണ്ടു. വൃത്തത്തെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന വരകളിലെല്ലാം, മുഴുവൻ വരയുടെയും വൃത്തത്തിനു പുറത്തുള്ള ഭാഗത്തിന്റെയും ഗുണനഫലം തുല്യമാണെന്ന് **വൃത്തങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടുവല്ലോ. ഈ ചിത്രവും അതിന്റെ സമവാക്യവും ഓർമയില്ലേ?

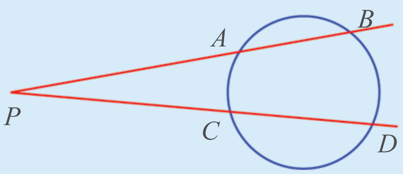


$$PA \times PB = PC \times PD$$

ഇനി ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് വൃത്തത്തെ തൊടുന്ന ഒരു വരയും മുറിക്കുന്ന ഒരു വരയും വരച്ചാലോ?

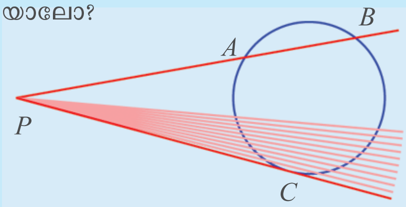
മാറാത്ത ബന്ധം

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



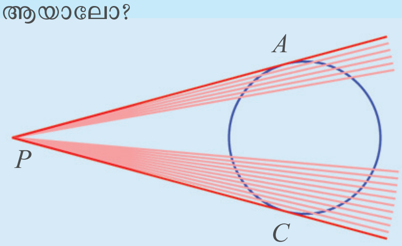
ഇതിൽ $PA \times PB = PC \times PD$ എന്നറിയാമല്ലോ.

താഴത്തെ വര, കറങ്ങി തൊടുവരയായാലോ?



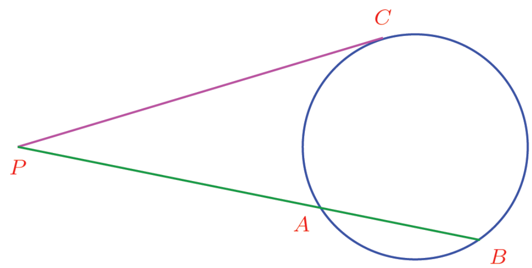
PD എന്നത് PC തന്നെയാകും; നേരത്തെ കണ്ട ബന്ധം $PA \times PB = PC^2$ എന്നാകും.

മുകളിലത്തെ വരയും തൊടുവര ആയാലോ?

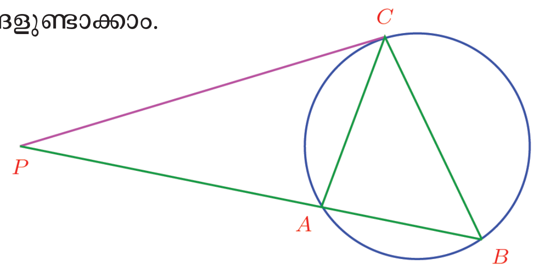


ഈ ബന്ധം $PA^2 = PC^2$ അഥവാ $PA = PC$ എന്നാകും.

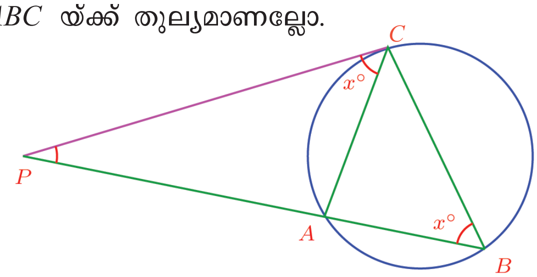
ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്നുള്ള തൊടുവരകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണെന്ന് നേരത്തെ കണ്ടല്ലോ.



ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധമറിയാൻ, AC, BC യോജിപ്പിച്ച് ത്രികോണങ്ങളുണ്ടാക്കാം.



AC എന്ന ഞാൺ, PC എന്ന തൊടുവരയുമായി C യിൽ $\angle PCA$ ഉണ്ടാക്കുന്നു. ഇത് വൃത്തത്തിന്റെ മറുഭാഗത്ത് AC ഉണ്ടാക്കുന്ന $\angle ABC$ യ്ക്ക് തുല്യമാണല്ലോ.



അതായത്, PAC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ C യിലെ കോൺ, ത്രികോണം PBC യിൽ B യിലെ കോണിന് തുല്യമാണ്. P യിൽ രണ്ടു ത്രികോണത്തിനും ഒരേ കോണാണ്.

അതായത്, ഈ ത്രികോണങ്ങളിലെ കോണുകളെല്ലാം തുല്യമാണ്. അതിനാൽ ഒരേ കോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധവും തുല്യമാണ്.

5JHHB6

PAC യിൽ $x°$ കോണിന്റെ എതിർവശം PA യും, PBC യിൽ $x°$ കോണിന്റെ എതിർവശം PC യും ആണ്. PAC യിലെ ഏറ്റവും വലിയ വശം PC യും PBC യിലെ ഏറ്റവും വലിയ വശം PB യും.

അപ്പോൾ

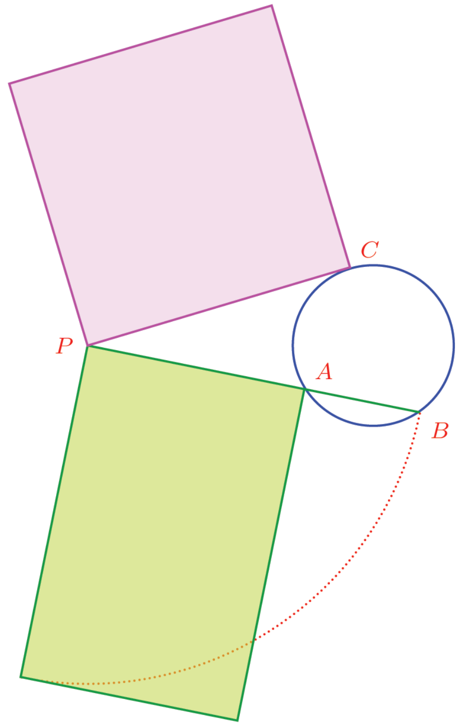
$$\frac{PA}{PC} = \frac{PC}{PB}$$

ഇത് അൽപം മാറ്റി ഇങ്ങനെയെഴുതാം.

$$PA \times PB = PC^2$$

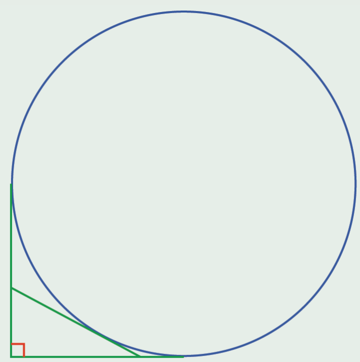
മുറിക്കുന്ന വരയുടെയും വൃത്തത്തിനു പുറത്തുള്ള ഭാഗത്തിന്റെയും ഗുണനഫലം, തൊടുവരയുടെ വർഗത്തിനു തുല്യമാണ്.

പരസ്പരം മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ഞാണുകളിലെന്നപോലെ, ഇതും പരപ്പളവുകളായി പറയാം. മുറിക്കുന്ന വരയും വൃത്തത്തിന്റെ പുറത്തുള്ള ഭാഗവും വശങ്ങളായ ചതുരത്തിനും, തൊടുവര വശമായ സമചതുരത്തിനും ഒരേ പരപ്പളവാണ്.

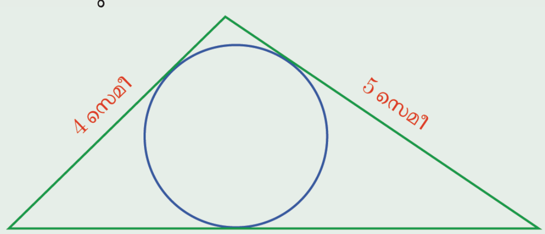


(1) ഒരു വൃത്തത്തിലെ പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ടു തൊടുവരകളും, മറ്റൊരു തൊടുവരയും ചേർന്ന് ഒരു ത്രികോണമുണ്ടാക്കിയ ചിത്രം നോക്കൂ.

ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസത്തിനു തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

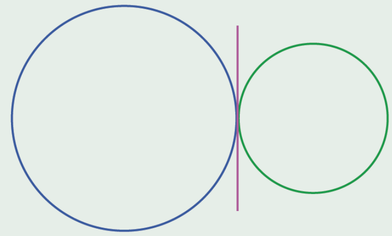


(2) ഒരു വൃത്തത്തിലെ മൂന്നു തൊടുവരകൾ ചേർന്ന ത്രികോണമാണ് ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നത്.

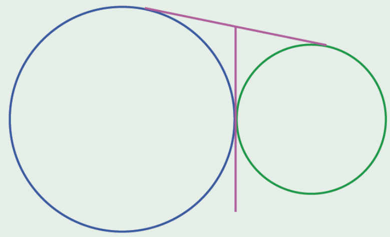


ഓരോ മൂലയിൽ നിന്നും തൊടുന്ന ബിന്ദു വരെയുള്ള തൊടുവരകളുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.

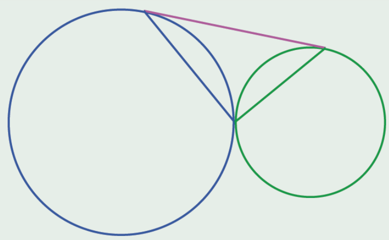
(3) ചിത്രത്തിൽ, ഒരു ബിന്ദുവിൽ തൊടുന്ന രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾക്ക് ആ ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള പൊതുവായ തൊടുവര വരച്ചിരിക്കുന്നു.



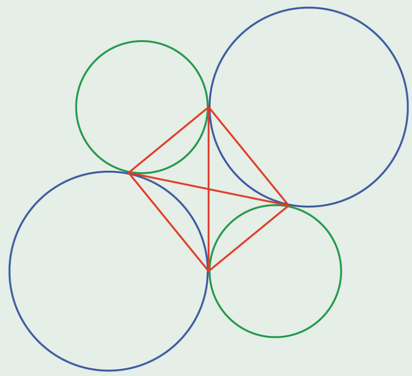
i) ഈ വൃത്തങ്ങൾക്ക് പൊതുവായ മറ്റൊരു തൊടുവരയെ, ആദ്യത്തെ തൊടുവര സമഭാഗംചെയ്യുമെന്ന് തെളിയിക്കുക.



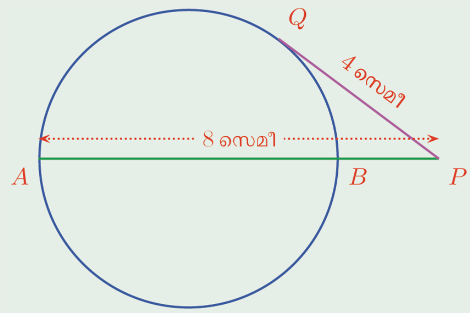
ii) ഈ രണ്ടു തൊടുവരകളും വൃത്തങ്ങളെ തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ ലഭിക്കുന്ന ത്രികോണം മട്ടത്രികോണമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.



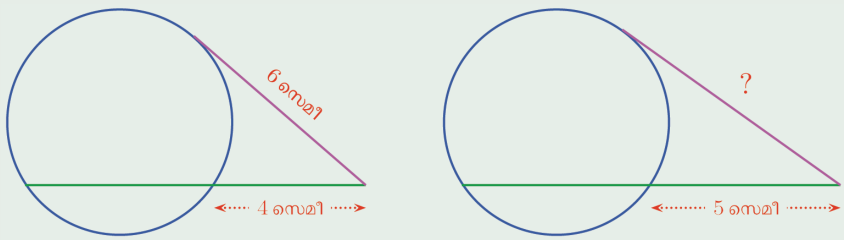
iii) വലതുവശത്തെ ചിത്രം സൗകര്യമായ അളവുകളെടുത്ത്, നോട്ടുബുക്കിൽ വരയ്ക്കുക. വൃത്തങ്ങൾ തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച് വരയ്ക്കുന്ന ചതുർഭുജത്തിന്റെ പ്രത്യേകത എന്താണ്?



(4) ചിത്രത്തിൽ AB വ്യാസവും, P അതു നീട്ടിയതിലെ ഒരു ബിന്ദുവുമാണ്. P യിൽ നിന്നുള്ള തൊടുവര വൃത്തത്തെ Q വിൽ തൊടുന്നു. വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്രയാണ്?



(5) ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങളിൽ ആദ്യത്തേതിൽ, ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച വര 4 സെന്റിമീറ്റർ പുറത്തേക്കു നീട്ടി, അവിടെനിന്ന് വൃത്തത്തിലേക്ക് വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരയുടെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്റർ എന്നു കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

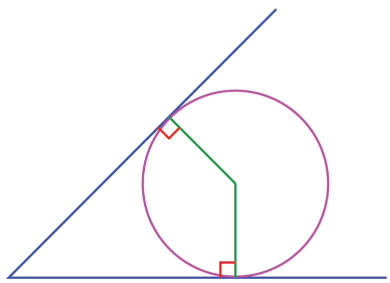


ഇതേ വരതന്നെ 1 സെന്റിമീറ്റർ കൂടി വലത്തോട്ടു നീട്ടിയ സ്ഥാനത്തു നിന്ന് വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരയാണ് രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ. ഈ തൊടുവരയുടെ നീളമെന്താണ്?

വരയെ തൊടുന്ന വട്ടം

ഒരു വൃത്തത്തെ തൊടുന്ന രണ്ടു വരകൾ ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്നു വരയ്ക്കാമെന്നും, എങ്ങനെ വരയ്ക്കണമെന്നും കണ്ടു.

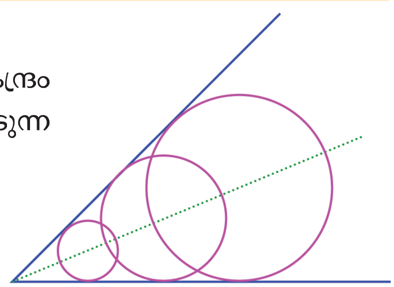
അപ്പോൾ മറിച്ചൊരു ചോദ്യം. ഒരു ബിന്ദുവിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന രണ്ടു വരകളെ തൊടുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കാമോ? ചിത്രം നോക്കൂ.



വൃത്തത്തിന്റെ ആരങ്ങൾ ഈ വരകൾക്കു ലംബമാണ്. അതായത്, വൃത്തകേന്ദ്രം ഈ രണ്ടു വരകളിൽ നിന്ന് ഒരേ അകലത്തിലായിരിക്കണം. അപ്പോൾ അത് ഈ കോണിന്റെ സമഭാജിയിലാകണമല്ലോ. (ഒൻപതാം ക്ലാസിലെ **പരപ്പളവ്** എന്ന പാഠത്തിൽ, **ത്രികോണഭാഗം** എന്നതിലെ കണക്ക് (4))

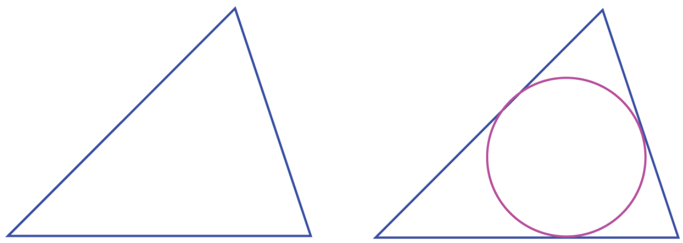
കൂട്ടിമുട്ടുന്ന രണ്ടു വരകളെ തൊടുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം, വരകൾ ചേരുന്ന കോണിന്റെ സമഭാജിയിലാണ്.

കോണിന്റെ സമഭാജിയിൽ എവിടെ കേന്ദ്രം എടുത്താലും, രണ്ടു വരകളേയും തൊടുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കാം.



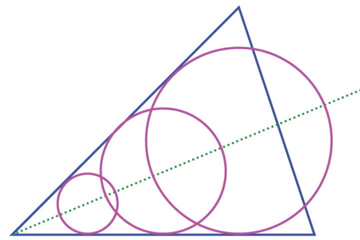
അപ്പോൾ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു വശങ്ങളെയും തൊടുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമോ എന്നതാണ് അടുത്ത ചോദ്യം.

NT-887-3-MATHS-10-M-VOL.2

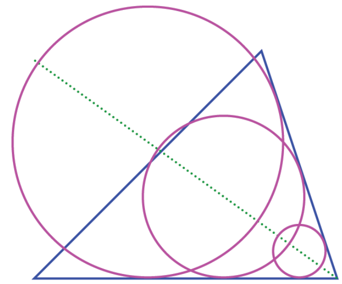


> ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു കോണും അതിന്റെ സമഭാജിയും വരയ്ക്കുക. സമഭാജിയിൽ ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തി ആ ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് കോണിന്റെ ഏതെങ്കിലും ഒരു വശത്തേക്കുള്ള ലംബം വരച്ച്, ലംബവും വശവും കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. സമഭാജിയിലെ ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി, വശത്തിലെ ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ഈ വൃത്തം, കോണിന്റെ രണ്ടാമത്തെ വശത്തേയും തൊടുന്നില്ലേ? വൃത്തകേന്ദ്രം സമഭാജിയിലൂടെ മാറ്റി നോക്കൂ.

താഴത്തേയും ഇടത്തേയും വശങ്ങൾ ചേരുന്ന കോണിന്റെ സമഭാജിയിൽ ഏതു ബിന്ദു എടുത്താലും, ആ രണ്ടു വശങ്ങളെ തൊടുന്ന വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കാം.

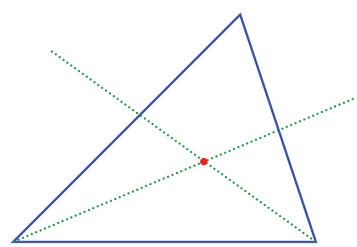


താഴത്തേയും വലത്തേയും വശങ്ങൾ ചേരുന്ന കോണിന്റെ സമഭാജിയിലെ ബിന്ദുക്കളെടുത്താൽ ആ രണ്ടു വശങ്ങളെ തൊടുന്ന വൃത്തങ്ങളും വരയ്ക്കാം.



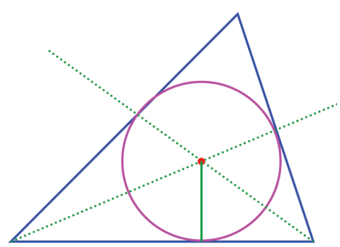
അപ്പോൾ ഈ രണ്ടു സമഭാജികളിലുമുള്ള ബിന്ദു എടുത്താലോ? അതായത്, അവ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദു?

ഈ ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് മൂന്നു വശങ്ങളിലേക്കുമുള്ള ലംബങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമല്ലേ? ഈ നീളം ആരമായി, ഈ ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി വൃത്തം വരച്ചാലോ?



ഈ വൃത്തത്തിന് ത്രികോണത്തിന്റെ **അന്തർവൃത്തം (incircle)** എന്നാണു പേര്.

ഇവിടെ മറ്റൊരു കാര്യം കൂടി കാണാം. അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് ഇടതും വലതുമുള്ള വശങ്ങളിലേക്കുള്ള ലംബങ്ങൾക്കും ഒരേ നീളമായതിനാൽ, വൃത്തകേന്ദ്രം ഈ വശങ്ങൾ ചേരുന്ന കോണിന്റെയും സമഭാജിയിലാണ്.

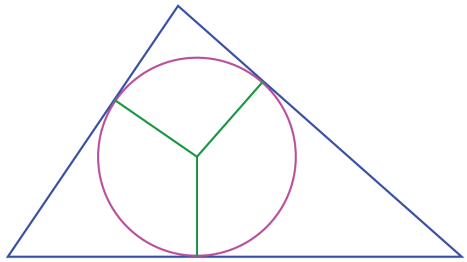


> ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു ത്രികോണം വരച്ച് അതിന്റെ അന്തർവൃത്തം വരയ്ക്കുക.

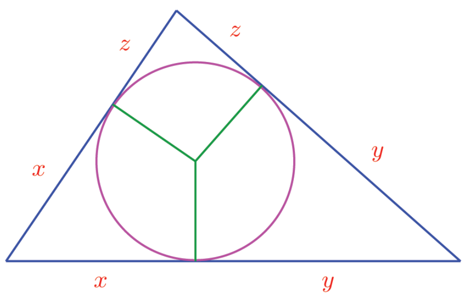
ഏതു ത്രികോണത്തിലും, കോണുകളുടെ സമഭാജികളെല്ലാം ഒരു ബിന്ദുവിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു.

അന്തർവൃത്തം ത്രികോണത്തെ തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കളും അതിന്റെ വശങ്ങളും തമ്മിൽ ചില ബന്ധങ്ങളുണ്ട്.

അതുകാണാൻ, ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ അന്തർവൃത്തം വശങ്ങളെ തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ വൃത്തകേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിച്ചു നോക്കാം.



ത്രികോണത്തിന്റെ ഓരോ മൂലയിൽ നിന്നും അന്തർവൃത്തത്തിലേക്കുള്ള തൊടുവരകൾ ചേർന്നതാണല്ലോ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ. ഓരോ മൂലയിൽ നിന്നും, തൊടുന്ന ബിന്ദു വരെയുള്ള തൊടുവരകളുടെ നീളം തുല്യവുമാണ്. അപ്പോൾ തൊടുവരകളുടെ നീളം x, y, z എന്നെടുത്ത്, ചുവടെ കാണുന്നതുപോലെ അടയാളപ്പെടുത്താം.



ഈ നീളങ്ങളെല്ലാം കൂട്ടിയാൽ, ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവാകും. അതായത് $2(x+y+z)$ ആണ് ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, തിരിച്ചുപറഞ്ഞാൽ, $x+y+z$ എന്നത്, ചുറ്റളവിന്റെ പകുതിയാണ്. ഇതിനെ s എന്നെഴുതിയാൽ

$$x + y + z = s$$

ഇനി ത്രികോണത്തിലെ വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ a, b, c എന്നെടുത്താൽ, മുകളിലെ ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്

$$x + y = a$$

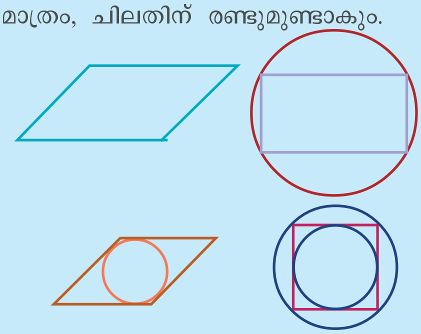
$$y + z = b$$

$$z + x = c$$

എന്നെല്ലാം കാണാം.

പരിവൃത്തവും അന്തർവൃത്തവും

ഏതു ത്രികോണത്തിനും പരിവൃത്തവും അന്തർവൃത്തവും വരയ്ക്കാം. എന്നാൽ ചതുർഭുജങ്ങളെടുത്താൽ, ചിലതിന് രണ്ടുമുണ്ടാകില്ല, ചിലതിന് ഏതെങ്കിലും ഒന്നുമാത്രം, ചിലതിന് രണ്ടുമുണ്ടാകും.



ഇനി x കിട്ടാൻ $x+y+z$ ൽ നിന്ന് $y+z$ കുറച്ചാൽ മതി. അതായത്.

$$x = (x+y+z) - (y+z) = s - b$$

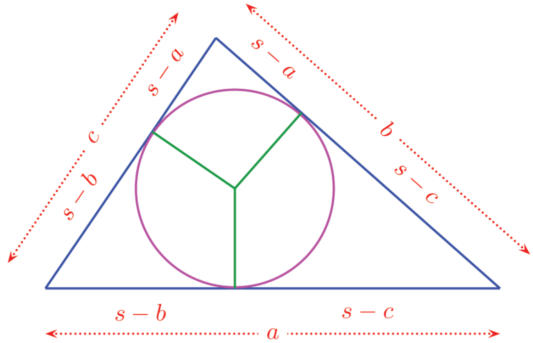
ഇതുപോലെ

$$y = (x+y+z) - (z+x) = s - c$$

എന്നും

$$z = (x+y+z) - (x+y) = s - a$$

എന്നും കാണാം. അപ്പോൾ തൊടുവരകളുടെ നീളം ഇങ്ങനെ എഴുതാം.



പരപ്പളവ്

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ അന്തർവൃത്തം മൂന്നു വശങ്ങളെയും ഭാഗിക്കുന്നതിന്റെ കണക്കു കണ്ടല്ലോ.

ഇക്കാര്യവും ത്രികോണത്തിൽ മറ്റു ചില വരകൾ വരച്ചു കിട്ടുന്ന ത്രികോണങ്ങളുടെ സാദൃശ്യവും ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാം. ഏഡി ഒന്നാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഗ്രീസിലെ ഹെറോൺ ആണ് ഇത് കണ്ടുപിടിച്ചത്. വശങ്ങളുടെ നീളം a, b, c ആയ ത്രികോണത്തിൽ

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

എന്നെടുത്താൽ, പരപ്പളവ്

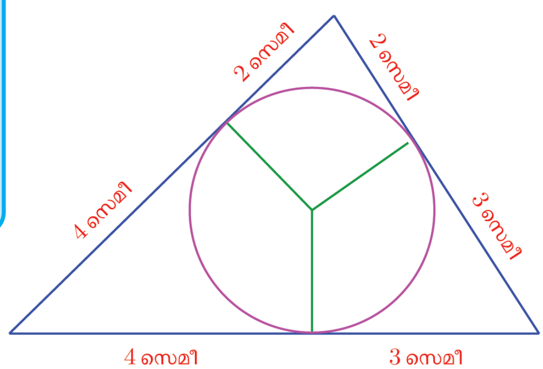
$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

എന്നാണ് ഹെറോൺ കണ്ടുപിടിച്ചത്.

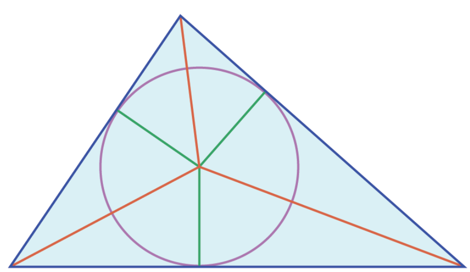
(https://en.wikipedia.org/wiki/Heron's_formula)

ഉദാഹരണമായി, വശങ്ങളുടെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്റർ, 6 സെന്റിമീറ്റർ, 7 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ പകുതി 9 സെന്റിമീറ്റർ.

അപ്പോൾ അന്തർവൃത്തം തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ വശങ്ങളെ ഭാഗിക്കുന്നത് $9-5=4$, $9-6=3$, $9-7=2$ എന്നിങ്ങനെയാണ്.



അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിന് ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവുമായി ബന്ധമുണ്ട്. അന്തർവൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളിലേക്കുള്ള വരകൾ, ത്രികോണത്തെ മൂന്നായി ഭാഗിക്കുമല്ലോ.



ഈ ചെറു ത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം ഒരു വശം, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശംതന്നെയാണ്; അതിലേക്കുള്ള ഉന്നതി അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരവും. അപ്പോൾ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം a, b. c എന്നും, അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരം r എന്നുമെടുത്താൽ, ചെറു ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് $\frac{1}{2}ar$, $\frac{1}{2}br$, $\frac{1}{2}cr$, എന്നിങ്ങനെയാകും. ഇവയുടെ തുക, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവാണ്; അത് A, എന്നെടുത്താൽ

$$A = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}(a + b + c)\, r = sr$$

ഈ സമവാക്യം

$$r = \frac{A}{s}$$

എന്നെഴുതാം.

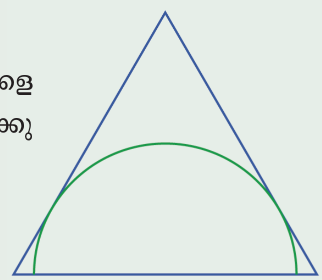
ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരം, ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവിനെ ചുറ്റളവിന്റെ പകുതികൊണ്ട് ഹരിച്ചതിനു തുല്യമാണ്.

?

(1) വശങ്ങളുടെ നീളം 4 സെന്റിമീറ്റർ, 5 സെന്റിമീറ്റർ, 6 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ത്രികോണം വരച്ച്, അതിന്റെ അന്തർവൃത്തം വരയ്ക്കുക. അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരം കണക്കാക്കുക.

(2) വശങ്ങളുടെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്ററും ഒരു കോൺ 50° യും ആയ സമഭുജസാമാന്തരികം വരച്ച് അതിന്റെ അന്തർവൃത്തം വരയ്ക്കുക.

(3) ഒരു സമഭുജത്രികോണം വരച്ച്, അതിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളെ തൊടുന്ന ഒരു അർധവൃത്തം ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ വരയ്ക്കുക.



(4) ലംബവശങ്ങൾ 5 സെന്റിമീറ്ററും 12 സെന്റിമീറ്ററുമായ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ അന്തർവൃത്ത ആരം കണക്കാക്കുക.

(5) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണം h ഉം, അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരം r ഉം ആണെങ്കിൽ, ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, $r(h + r)$ ആണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(6) ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരം, അതിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിന്റെ പകുതിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

പരപ്പളവ്

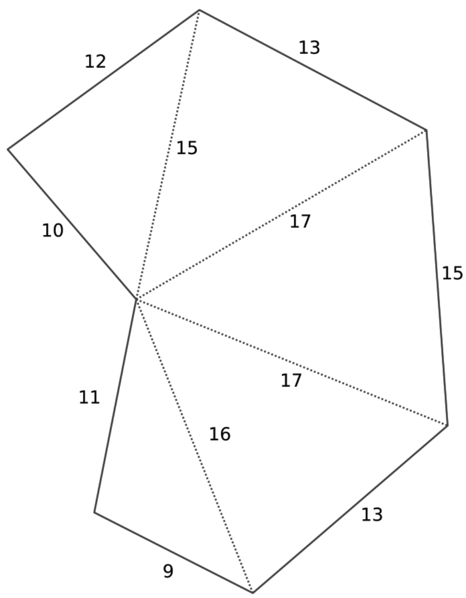
വശങ്ങളുടെ നീളം a, b, c ആയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ആണെന്ന് കണ്ടല്ലോ. ഉദാഹരണത്തിന് വശങ്ങളുടെ നീളം 12 സെന്റിമീറ്റർ, 35 സെന്റിമീറ്റർ, 43 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കി നോക്കാം. ഇതിൽ

$a = 12$, $b = 35$, $c = 43$ ആയതിനാൽ $s = \frac{12+35+43}{2} = 45$, $s-a = 33$, $s-b = 10$, $s-c = 2$ എന്നെല്ലാം കണക്കാക്കാം. അപ്പോൾ

$$\text{പരപ്പളവ്} = \sqrt{45 \times 33 \times 10 \times 2} \approx 172.33 \text{ ച.സെ.മീ.}$$

എന്ന് കാൽക്കുലേറ്റർ ഉപയോഗിച്ച് കണക്കാക്കാം.

വശങ്ങളെല്ലാം നേർവരയായ രൂപങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാൻ ഈ രീതി ഉപയോഗിക്കാം. ഒരു പുരയിടത്തിന്റെ ഏകദേശ ചിത്രവും അതിനെ ത്രികോണങ്ങളാക്കി ഭാഗിച്ചതുമാണ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്:

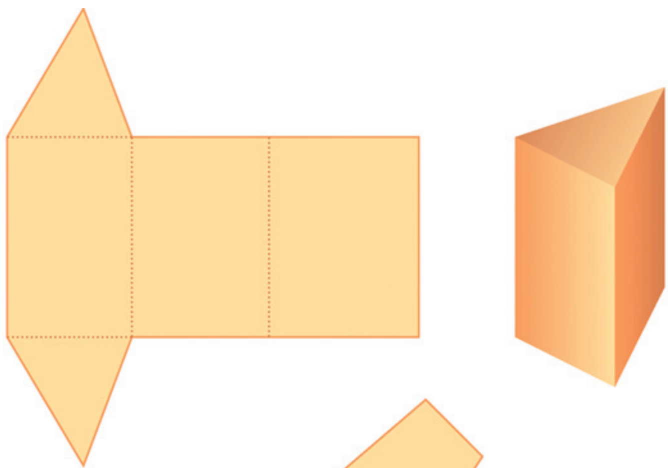


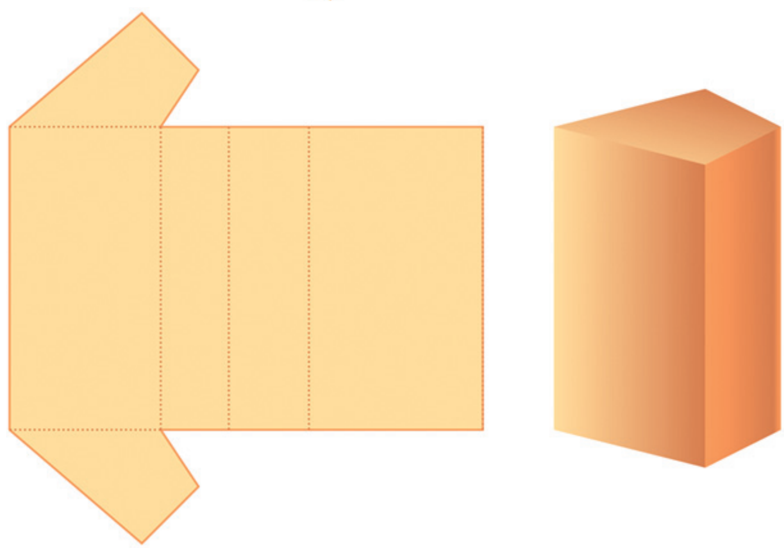
എല്ലാ ത്രികോണങ്ങളുടെയും മുഴുവൻ അളവുകളുമുണ്ടല്ലോ (എല്ലാം മീറ്ററിൽ). അപ്പോൾ നേരത്തെ കണ്ടതനുസരിച്ച് ഈ ത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുകയും അവയുടെ തുക കണ്ടുപിടിച്ച് പുരയിടത്തിന്റെ ആകെ പരപ്പളവും കണക്കാക്കാം.

8 ഘനരൂപങ്ങൾ

സ്തൂപികകൾ

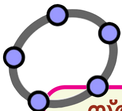
പല രീതിയിൽ കടലാസ് വെട്ടിയെടുത്ത്, മടക്കി ഒട്ടിച്ച്, സ്തംഭങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാം:





ഇത്തരം സ്തംഭങ്ങളെക്കുറിച്ച് പലതും പഠിക്കുകയും ചെയ്തു.

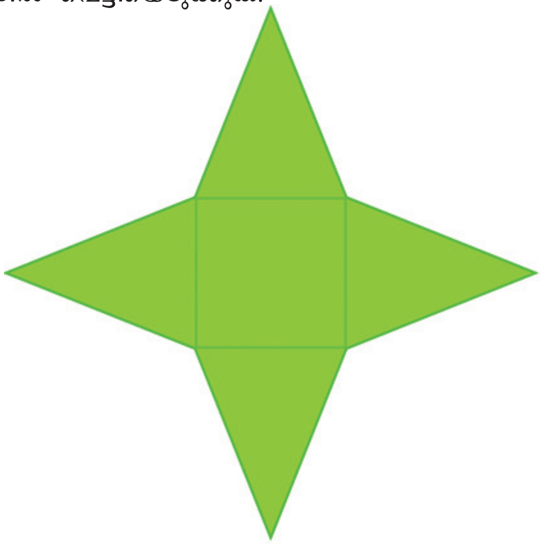
ഇനി വേറൊരു രൂപമുണ്ടാക്കി നോക്കാം.



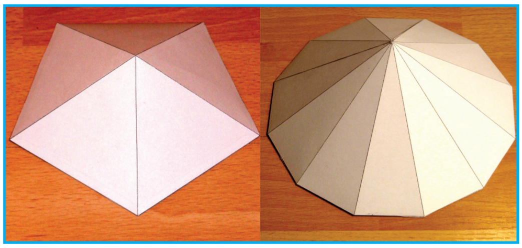
സ്തൂപികകൾ ജിയോജിബ്രയിൽ

ജിയോജിബ്രയിൽ സ്തംഭങ്ങൾ നിർമിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് 9-ാം ക്ലാസിൽ കണ്ടതാണല്ലോ. ഇത്തരത്തിൽ സ്തൂപികകൾ നിർമിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം. 3D Graphics തുറന്ന് ആവശ്യമായ പ്രാരംഭ ക്രമീകരണങ്ങൾ നടത്തുക. (9-ാം ക്ലാസിലെ **സ്തംഭങ്ങൾ** എന്ന അധ്യായത്തിലെ **ഘനരൂപങ്ങൾ ജിയോജിബ്രയിൽ** എന്ന ഭാഗം കാണുക) Graphics ൽ ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കുക. 3D Graphics ൽ Extrude to Pyramid or Cone ഉപയോഗിച്ച് ചതുരത്തിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ സ്തൂപികയുടെ ഉയരം നൽകുക. (ഒരു സ്ലൈഡർ ഉണ്ടാക്കി ഉയരമായി സ്ലൈഡറിന്റെ പേര് നൽകുകയുമാവാം)

ആദ്യം ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ഒരു ചിത്രം കടലാസിൽ വെട്ടിയെടുക്കുക:



നടുക്കു സമചതുരം. ചുറ്റും നാലു ത്രികോണങ്ങൾ; ഇവ നാലും ഒരേപോലെയുള്ള (തുല്യമായ) സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളായിരിക്കണം. ഇനി ഇത് ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ മടക്കി ഒട്ടിക്കുക:

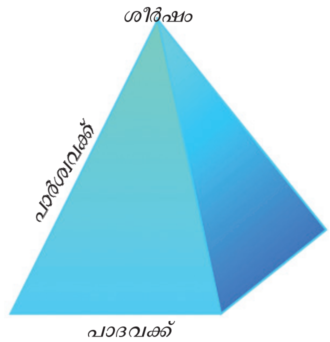


എന്തു രൂപമാണിത്? സ്തംഭമെന്നു വിളിക്കാൻ വയ്യ; സ്തംഭങ്ങൾക്ക് ഒരേ പോലെയുള്ള രണ്ടു പാദങ്ങളും, വശങ്ങളിൽ ചതുരങ്ങളുമാണ്. ഇപ്പോഴുണ്ടാക്കിയ രൂപത്തിലാണെങ്കിൽ, ചുവടെ സമചതുരം, മുകളിലൊരു മുന, ചുറ്റും ത്രികോണങ്ങൾ.

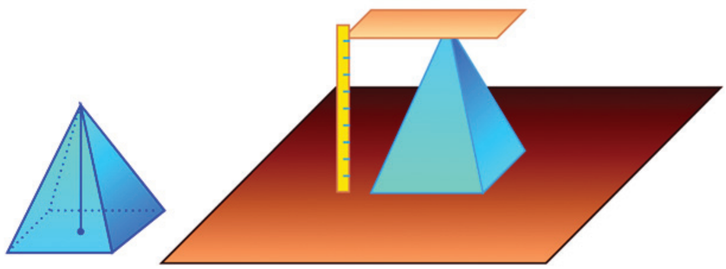
സമചതുരത്തിനു പകരം, മറ്റേതെങ്കിലും ചതുരമാവാം; അതുമല്ലെങ്കിൽ ത്രികോണമോ, മറ്റേതെങ്കിലും ബഹുഭുജമോ ആവാം. പരീക്ഷിച്ചുനോക്കൂ. (പാദം സമബഹുഭുജമാകുമ്പോഴാണ് ഭംഗി)

ഇത്തരം രൂപങ്ങൾക്കെല്ലാം പൊതുവായ പേരാണ് സ്തൂപികകൾ (pyramids).

സ്തൂപികയുടെ പാദമായ ബഹുഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളെ, സ്തൂപികയുടെ പാദവക്കുകൾ (base edges) എന്നും, ത്രികോണങ്ങളുടെ മറ്റു വശങ്ങളെ പാർശ്വവക്കുകൾ (lateral edges) എന്നുമാണ് പറയുന്നത്. സ്തൂപികയുടെ മുകളറ്റത്തെ അതിന്റെ ശീർഷം (apex) എന്നാണ് പറയുന്നത്.



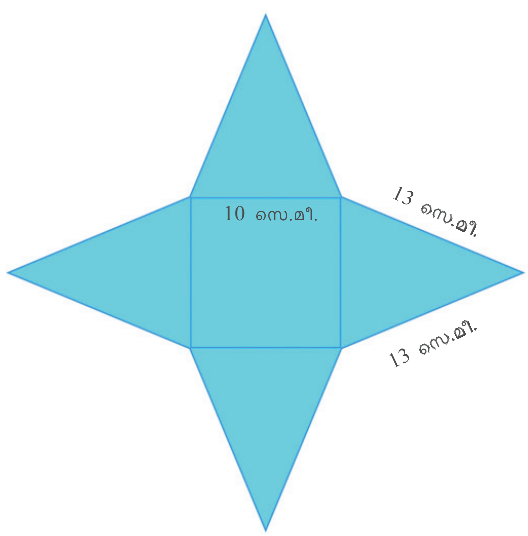
ഒരു സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരമെന്നത്, അതിന്റെ പാദങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലമാണല്ലോ. ഒരു സ്തൂപികയുടെ ഉയരമെന്നാൽ, ശീർഷത്തിൽനിന്ന് പാദത്തിലേക്കുള്ള ലംബദൂരമാണ്.



പരപ്പളവ്

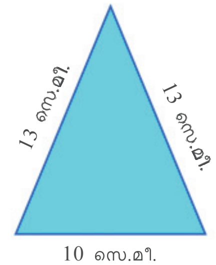
പാദവക്കുകൾ 10 സെന്റിമീറ്ററും, പാർശ്വവക്കുകൾ 13 സെന്റിമീറ്ററുമായ സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

ഉപരിതലപരപ്പളവെന്നാൽ, ഇതുണ്ടാക്കാൻ ആവശ്യമായ കടലാസിന്റെ പരപ്പളവാണല്ലോ. ഈ സ്തൂപിക മുറിച്ചു നിവർത്തി വച്ചാൽ എങ്ങനെയിരിക്കും?

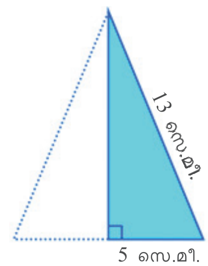


ജിയോജിബ്രയിൽ നിർമിച്ച ഒരു സ്തൂപിക പൊളിച്ച് നിവർത്തുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം. നേരത്തെ പറഞ്ഞതുപോലെ 3D Graphics ൽ ഒരു സ്തൂപിക നിർമിക്കുക. Net ഉപയോഗിച്ച് ഈ സ്തൂപികയിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ സ്തൂപിക പൊളിച്ച് നിവർത്തിയ രൂപം ലഭിക്കും. (ഇതിനെ സ്തൂപികയുടെ net എന്നാണ് വിളിക്കുന്നത്) ഇതോടൊപ്പം Graphics ൽ ഒരു സ്ലൈഡറും ലഭിക്കും. ഈ സ്ലൈഡറുപയോഗിച്ച് net ൽ നിന്ന് സ്തൂപിക രൂപപ്പെടുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് കാണാം. Algebra യിൽ Pyramid എന്നതിലെ സ്തൂപികയുടെ പേരിനു നേരെ ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് സ്തൂപിക മറച്ചു വയ്ക്കുകയുമാവാം.

ഇതിലെ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 100 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററെന്ന് പെട്ടെന്നു പറയാം; ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവോ?



ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് പാദത്തിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണല്ലോ.



അതു കണക്കാക്കാൻ ത്രികോണത്തിന്റെ ഉയരം കൂടി വേണം. സമപാർശ്വത്രികോണമായതിനാൽ, ഈ ലംബം താഴത്തെ വശത്തെ സമഭാഗം ചെയ്യും. പൈഥാഗറസ് സിദ്ധാന്തമുപയോഗിച്ച്, ലംബത്തിന്റെ നീളം

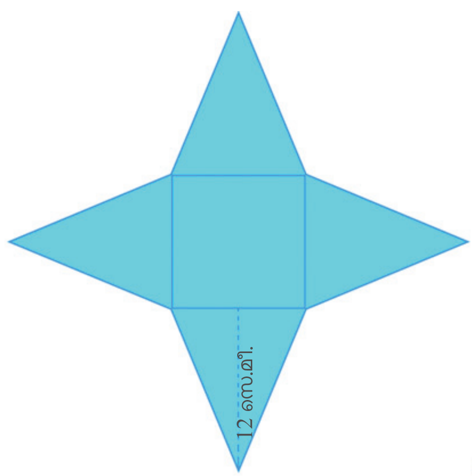
$$\sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ സെന്റിമീറ്റർ}$$

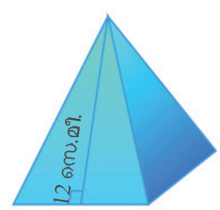
എന്നു കണ്ടുപിടിക്കുകയും ചെയ്യാം. അപ്പോൾ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, $5 \times 12 = 60$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

ഉയരവും ചരിവുയരവും

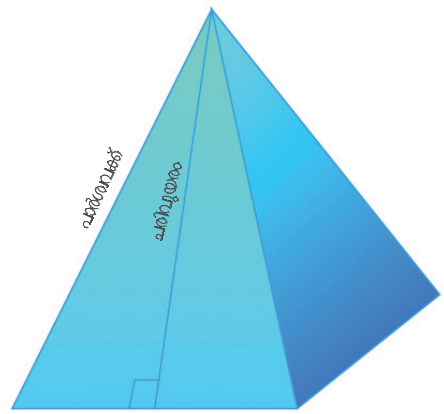
ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു സമചതുര സ്തൂപിക നിർമിക്കുക. Midpoint or Centre ഉപയോഗിച്ച് സ്തൂപികയുടെ ഒരു പാദവക്കിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും പാദത്തിന്റെ വികർണത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും അടയാളപ്പെടുത്തുക. Segment ഉപയോഗിച്ച് സ്തൂപികയുടെ ഉയരം, ചരിവുയരം ഇവ അടയാളപ്പെടുത്താം. Polygon ഉപയോഗിച്ച്, ഉയരം, ചരിവുയരം, പാർശ്വവക്ക്, പാദവക്കിന്റെ പകുതി, തുടങ്ങിയവ വശങ്ങളായി വരുന്ന മട്ടത്രികോണങ്ങൾ വരച്ച് നോക്കൂ. Net ഉപയോഗിച്ച് സ്തൂപിക പൊളിച്ചു നിവർത്തി നോക്കാം. സ്തൂപിക മറച്ചു വയ്ക്കുകയും ചെയ്യാം.

കടലാസ് സ്തൂപികയായിക്കഴിയുമ്പോൾ, ഇപ്പോൾ കണ്ടുപിടിച്ച ഉയരം എന്താകും?





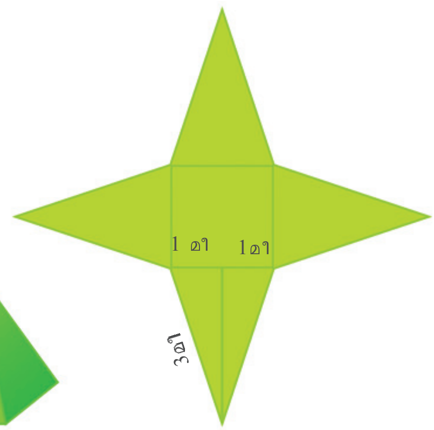
ഈ നീളത്തെ സ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരം (**slant height**) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

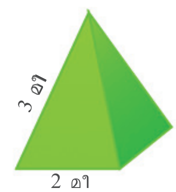


ഇപ്പോൾ ചെയ്ത കണക്കിൽ സ്തൂപികയുടെ പാദവക്കും, പാർശ്വവക്കും, ചരിവുയരവും തമ്മിലുള്ള ഒരു ബന്ധം കണ്ടല്ലോ; ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെയുള്ള ഒരു മട്ടത്രികോണം, സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ഓരോ വശത്തുമുണ്ട്. ലംബവശങ്ങൾ, ചരിവുയരവും പാദത്തിന്റെ പകുതിയും, കർണം പാർശ്വവക്കും ആണ്.

ഇനി ഈ കണക്ക് ചെയ്തുകൂടേ?

പാദവക്കുകൾ 2 മീറ്ററും, പാർശ്വവക്കുകൾ 3 മീറ്ററുമായ സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ഉപരിതലപരപ്പളവെത്രയാണ്?





പാദത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, 4 ചതുരശ്രമീറ്റർ. പാർശ്വവശങ്ങളുടെ പരപ്പളവു കാണാൻ ചരിവുയരം വേണം. നേരത്തെ പറഞ്ഞ മട്ടത്രികോണത്തിൽ ഒരു വശം, പാദവക്കിന്റെ പകുതി 1 മീറ്ററും; കർണം, പാർശ്വവക്ക് ആയ 3 മീറ്ററും; അതിനാൽ ചരിവുയരം

$$\sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2} \text{ മീറ്റർ}$$

ഇതുപയോഗിച്ച് ഓരോ ത്രികോണവശത്തിന്റെയും പരപ്പളവ്,

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ ചതുരശ്രമീറ്റർ}$$

എന്നു കാണാം. അപ്പോൾ സ്തൂപികയുടെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്, $4 + \left(4 \times 2\sqrt{2}\right) = 4 + 8\sqrt{2}$ ചതുരശ്രമീറ്റർ.

ഇതുകൊണ്ടു തൃപ്തിയായില്ലെങ്കിൽ, കാൽക്കുലേറ്റർ ഉപയോഗിച്ച് (അല്ലെങ്കിൽ $\sqrt{2}$ നോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യ ഓർത്തെടുത്ത്), ഇത് ഏകദേശം 15.31 ചതുരശ്രമീറ്ററാണെന്നു കണ്ടുപിടിക്കാം.

?

(1) വശങ്ങൾക്കെല്ലാം 5 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു സമചതുരം; ഒരു വശം 5 സെന്റിമീറ്ററും അതിൽനിന്നു എതിർമൂലയിലേക്കുള്ള ഉയരം 8 സെന്റിമീറ്ററും ആയ നാലു സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങൾ; ഇവ ചേർത്തുവച്ച് ഒരു സമചതുരസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കണം. അതിന് എത്ര ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ കടലാസു വേണം?

(2) സമചതുരസ്തൂപികാകൃതിയിലുള്ള ഒരു കളിപ്പാട്ടത്തിന്റെ പാദവക്ക് 16 സെന്റിമീറ്ററും ചരിവുയരം 10 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. ഇത്തരം 500 കളിപ്പാട്ടങ്ങൾ ചായം പൂശുന്നതിന് ചതുരശ്രമീറ്ററിന് 80 രൂപ നിരക്കിൽ എത്ര രൂപ ചെലവാകും?

(3) ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയുടെ പാർശ്വമുഖങ്ങൾ സമഭുജത്രികോണങ്ങളാണ്. പാദവക്കിന്റെ നീളം 30 സെന്റിമീറ്റർ. അതിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

(4) ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയുടെ പാദചുറ്റളവ് 40 സെന്റിമീറ്ററും, വക്കുകളുടെ ആകെ നീളം 92 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. സ്തൂപികയുടെ ഉപരിതല പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

(5) പാർശ്വതലപരപ്പളവ്, പാദപ്പരപ്പളവിന് തുല്യമായ സമചതുരസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കാൻ കഴിയുമോ?

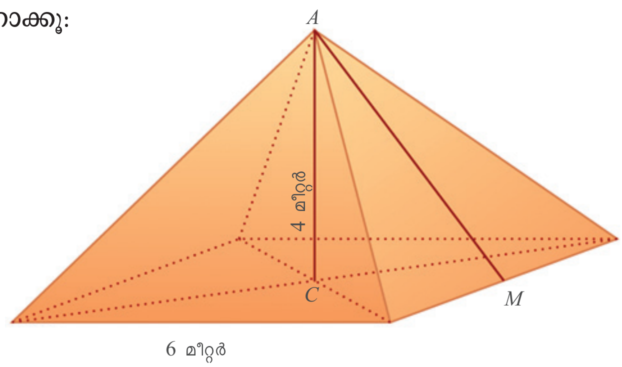
ഉയരവും ചരിവുയരവും

സ്തൂപികകളുടെ അളവുകളിൽ പലപ്പോഴും ഉയരം പ്രധാനമാണ്. ഈ കണക്കുനോക്കൂ.

സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ആകൃതിയിൽ ഒരു കൂടാരം ഉണ്ടാക്കണം. പാദത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 6 മീറ്റർ വേണം; കൂടാരത്തിന്റെ ഉയരം 4 മീറ്ററും. ഇതിന് എത്ര ചതുരശ്രമീറ്റർ ക്യാൻവാസ് വേണം?

കൂടാരത്തിന്റെ വശങ്ങളായ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാൻ, ചരിവുയരം വേണ്ടേ? തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങൾ വച്ച്, അതെങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

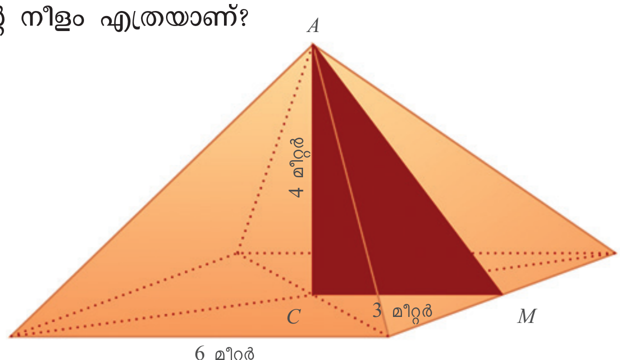
ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



ഈജിപ്റ്റിലെ പിരമിഡുകൾ

പിരമിഡ് എന്നു പറയുമ്പോൾത്തന്നെ മനസിലെത്തുന്ന ചിത്രം, ഈജിപ്റ്റിലെ പിരമിഡുകളാണ്. ഈജിപ്റ്റിലെ പലഭാഗങ്ങളിലായി 138 പിരമിഡുകളാണ് കണ്ടെത്തിയിട്ടുള്ളത്. ബി.സി. രണ്ടായിരത്തോടടുപ്പിച്ചാണ് ഇവയിൽ പലതും നിർമിച്ചത്.

നമുക്കുവേണ്ട ചരിവുയരം AM ആണ്. CM യോജിപ്പിച്ചാൽ, AM കർണമായ ഒരു മട്ടത്രികോണം കിട്ടില്ലേ? അതിൽ CM ന്റെ നീളം എത്രയാണ്?



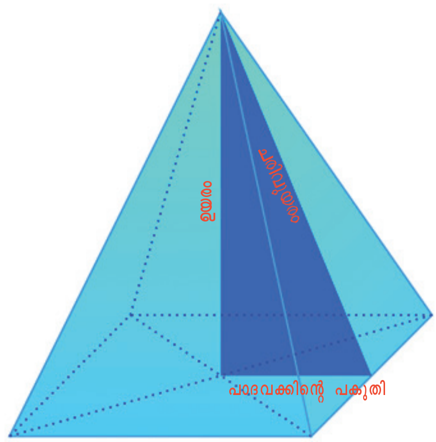
ചിത്രത്തിൽനിന്ന് $AM = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ മീറ്റർ എന്നു കണക്കാക്കാം.

അപ്പോൾ കൂടാരമുണ്ടാക്കാൻ, ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 6 മീറ്ററും, അതിൽനിന്നുള്ള ഉയരം 5 മീറ്ററുമായ നാലു സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളാണ് വേണ്ടത്.

ഇവയുടെ മൊത്തം പരപ്പളവ്, $4 \times \frac{1}{2} \times 6 \times 5 = 60$ ചതുരശ്രമീറ്ററാണല്ലോ.

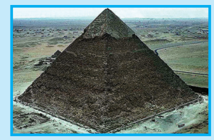
കൂടാരമുണ്ടാക്കാൻ ഇത്രയും ക്യാൻവാസ് വേണം.

ഈ കണക്കിൽ കണ്ട കാര്യം എല്ലാ സമചതുരസ്തൂപികയിലും ശരിയാണല്ലോ. ഏതു സമചതുരസ്തൂപികയ്ക്കുള്ളിലും, ചരിവുയരം കർണമായ ഒരു മട്ടത്രികോണം സങ്കൽപ്പിക്കാം; അതിന്റെ ലംബവശങ്ങൾ, സ്തൂപികയുടെ ഉയരവും പാദവക്കിന്റെ പകുതിയും.



മഹാസ്തൂപിക

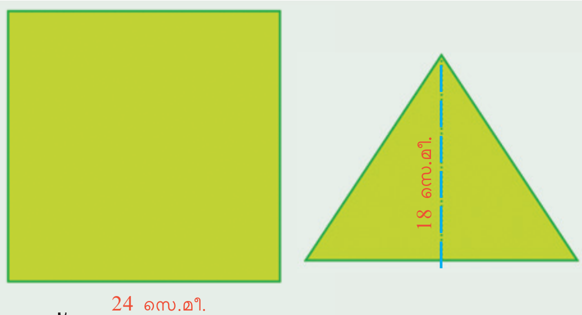
ഈജിപ്റ്റിലെ, ഗിസയിലെ മഹാസ്തൂപികയാണ് (Great Pyramid of Giza) ഏറ്റവും വലിയ പിരമിഡ്.



ഇതിന്റെ പാദമായ സമചതുരത്തിന് അര ലക്ഷത്തോളം ചതുരശ്രമീറ്റർ പരപ്പുണ്ട്; ഉയരം ഏതാണ്ട് 140 മീറ്ററും. ഇതു നിർമിക്കാൻ ഇരുപതു കൊല്ലത്തോളം വേണ്ടിവന്നിട്ടുണ്ടാകും എന്നാണ് കണക്കുകൂട്ടിയിരിക്കുന്നത്.

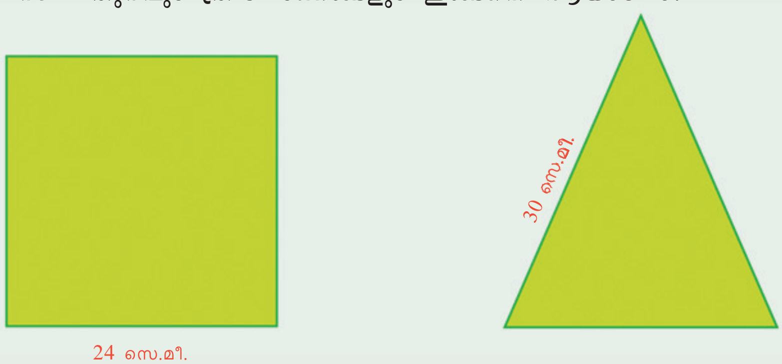
കൃത്യമായ സമചതുരത്തിൽ നിന്നു തുടങ്ങി, ഭീമാകാരമായ കല്ലുകൾ മേൽപ്പോട്ട് പടുത്തുയർത്തി, ഒരു ബിന്ദുവിൽ അവസാനിക്കുന്ന ഈ രാജകീയ ശവക്കല്ലറകൾ, മനുഷ്യാധ്വാനത്തിന്റേയും, നിർമാണ വൈദഗ്ധ്യത്തിന്റേയും, ഗണിതവിജ്ഞാനത്തിന്റേയും ജീവിക്കുന്ന പ്രതീകങ്ങളായി ഉയർന്നു നിൽക്കുന്നു.

(1) ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന അളവുകളിൽ ഒരു സമചതുരവും, നാലു ത്രികോണങ്ങളും ഉപയോഗിച്ചു സമചതുരസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കി.



സ്തൂപികയുടെ ഉയരം എത്രയാണ്?

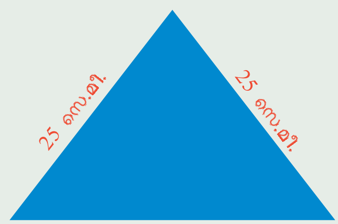
സമചതുരവും ത്രികോണങ്ങളും ഇങ്ങനെ ആയാലോ?



(2) കടലാസ് മുറിച്ച് ഒരു സമചതുരസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കണം. പാദവക്ക് 10 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 12 സെന്റിമീറ്ററും വേണം. ത്രികോണങ്ങളുടെ അളവുകൾ എത്ര ആയിരിക്കണം?

(3) ഏതു സമചതുരസ്തൂപികയിലും ഉയരം, ചരിവുയരം, പാർശ്വവക്ക് എന്നിവയുടെ വർഗങ്ങൾ സമാന്തരശ്രേണിയിലാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

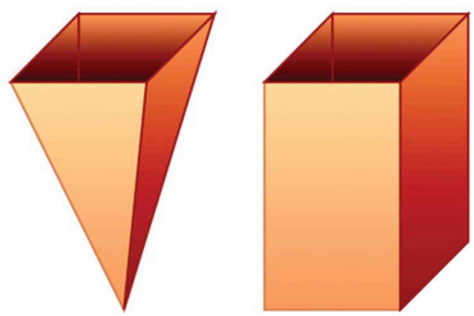
(4) ചിത്രത്തിൽ കൊടുത്ത സമപാർശ്വത്രികോണം പാർശ്വമുഖങ്ങളായി ഒരു സമചതുരസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കണം. അതിന്റെ ഉയരം എന്തായിരിക്കും? പാദവക്ക് 30 സെന്റിമീറ്ററിനു പകരം 40 സെന്റിമീറ്ററായാലോ?



തുല്യമായ ഏത് നാലു സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചും സമചതുരസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കാൻ കഴിയുമോ?

സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം

ഏതു സ്തംഭത്തിന്റെയും വ്യാപ്തം പാദപരപ്പളവിന്റെയും, ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണെന്ന് കണ്ടല്ലോ. ഒരു സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തമോ?



സമചതുരസ്തൂപിക തന്നെ എടുക്കാം. ആദ്യം ഒരു പരീക്ഷണമാവാം. നല്ല കട്ടിയുള്ള കടലാസുകൊണ്ട്, ഒരു തുറന്ന സമചതുരസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കുക. ഇനി, അതേ പാദവും ഉയരവുമുള്ള ഒരു തുറന്ന സമചതുരസ്തംഭവും ഉണ്ടാക്കുക.

സ്തൂപികാവ്യാപ്തം

ഒരേ പാദവും ഒരേ ഉയരവുമുള്ള ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയും സമചതുരസ്തംഭവും ജിയോജിബ്രയിൽ നിർമിക്കുക. ഇവ പെട്ടെന്ന് തിരിച്ചറിയാൻ ഉള്ളിലുള്ള സ്തൂപികയുടെ നിറം മാറ്റികൊടുക്കുകയും Opacity 100 ആക്കുകയും ചെയ്താൽ മതി (Object properties → Colour) Volume ഉപയോഗിച്ച് സ്തൂപികയുടേയും സ്തംഭത്തിന്റെയും വ്യാപ്തം കണക്കാക്കുക. ഇവ തമ്മിൽ എന്താണ് ബന്ധം? ഇവയുടെ പാദവും ഉയരവും മാറ്റിയാലോ?

സ്തൂപികയിൽ മണൽ നിറച്ച്, സ്തംഭത്തിലേക്കു പകരുക; മണൽനിരപ്പിന്റെ ഉയരം സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണെന്ന് അളന്നു നോക്കുക. മൂന്നിലൊന്നല്ലേ? സ്തംഭം നിറയാൻ എത്ര തവണ ഇതുപോലെ സ്തൂപികയിൽ മണലെടുക്കണം?

അപ്പോൾ സ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ മൂന്നു മടങ്ങാണെന്ന് കാണാം. (ഇതിന്റെ ഗണിതപരമായ വിശദീകരണം, പാഠത്തിന്റെ അവസാനഭാഗത്ത് കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്).

സ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം, പാദപരപ്പളവിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണെന്ന് ഒമ്പതാംക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ട്.

അപ്പോൾ സമചതുരസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തത്തെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം?

സമചതുരസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം, പാദപരപ്പളവിന്റെയും, ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ മൂന്നിലൊന്നാണ്.

ഉദാഹരണമായി, പാദവക്കുകൾ 10 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 8 സെന്റിമീറ്ററുമായ സമചതുരസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം $\frac{1}{3} \times 10^2 \times 8 = 266\frac{2}{3}$ ഘനസെന്റിമീറ്ററാണ്.

ലോഹം കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ ഒരു സമചതുരക്കട്ടയുടെ ഒരു വക്കിന്റെ നീളം 15 സെന്റിമീറ്ററാണ്. ഇത് ഉരുക്കി 25 സെന്റിമീറ്റർ പാദവക്കുള്ള ഒരു സമചതുരസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കി. അതിന്റെ ഉയരം എന്താണ്?

സമചതുരക്കട്ടയുടെ വ്യാപ്തം 15^3 ഘനസെന്റിമീറ്റർ.

ഉരുക്കി ഉണ്ടാക്കുന്ന സമചതുരസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തവും ഇതുതന്നെ. പാദപരപ്പളവിനെ ഉയരത്തിന്റെ മൂന്നിലൊന്നുകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണല്ലോ സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം.

കണക്കിലെ സ്തൂപികയുടെ പാദപരപ്പളവ് 25^2 ചതുരശ്രമീറ്റർ ആയതിനാൽ, ഉയരത്തിന്റെ മൂന്നിലൊന്ന് $\frac{15^3}{25^2}$ എന്നും, അതിൽനിന്ന് ഉയരം

$$3 \times \frac{15^3}{25^2} = 16.2 \text{ സെന്റിമീറ്റർ}$$

എന്നും കാണാം.

(1) പാദവക്ക് 10 സെന്റിമീറ്ററും, ചരിവുയരം 15 സെന്റിമീറ്ററുമായ സമചതുരസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം എത്രയാണ്?

(2) രണ്ടു സമചതുരസ്തൂപികകളുടെ വ്യാപ്തം തുല്യമാണ്. ഒന്നാമത്തെ സ്തൂപികയുടെ പാദവക്കിന്റെ പകുതിയാണ് രണ്ടാമത്തെ സ്തൂപികയുടെ പാദവക്കിന്റെ നീളം. ഒന്നാമത്തെ സ്തൂപികയുടെ ഉയരത്തിന്റെ എത്ര മടങ്ങാണ് രണ്ടാമത്തെ സ്തൂപികയുടെ ഉയരം?

(3) രണ്ടു സമചതുരസ്തൂപികകളുടെ പാദവക്കുകൾ 1 : 2 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. അവയുടെ ഉയരങ്ങൾ 1 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിലും. ഒന്നാമത്തെ സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം 180 ഘനസെന്റിമീറ്ററാണ്. രണ്ടാമത്തെ സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം എത്രയാണ്?

(4) വക്കുകളെല്ലാം തുല്യമായ ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയുടെ പാദവക്കിന്റെ നീളം 18 സെന്റിമീറ്ററാണ്. സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം കണക്കാക്കുക.

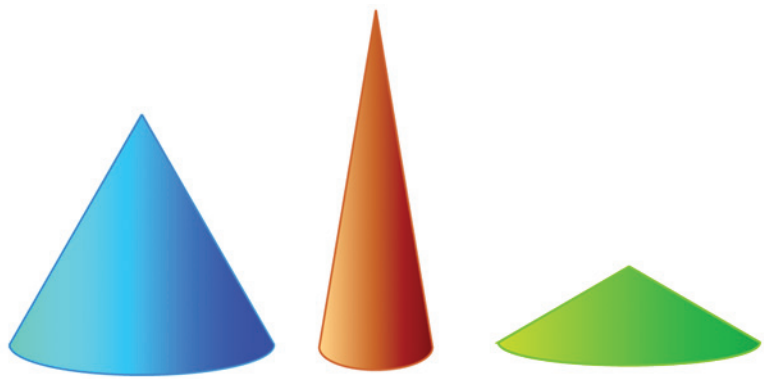
(5) ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരം 25 സെന്റിമീറ്ററും, ഉപരിതല പരപ്പളവ് 896 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററുമാണ്. സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം കണക്കാക്കുക.

(6) വക്കുകളെല്ലാം തുല്യനീളമായ ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ഉയരം 12 സെന്റിമീറ്ററാണ്. അതിന്റെ വ്യാപ്തം എന്താണ്?

(7) പാദചുറ്റളവ് 64 സെന്റിമീറ്ററും വ്യാപ്തം 1280 ഘനസെന്റിമീറ്ററുമായ സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് എന്താണ്?

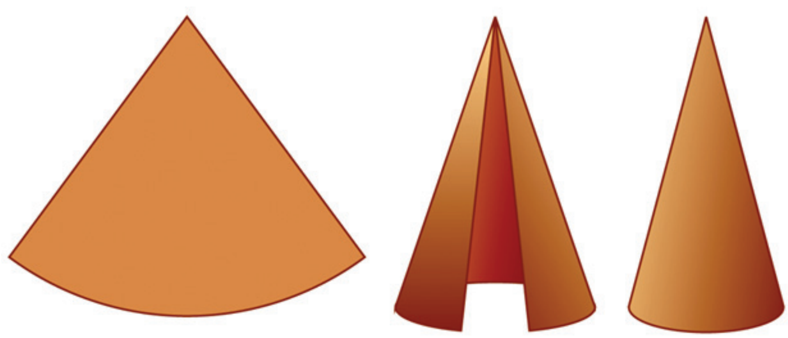
വൃത്തസ്തൂപിക

വൃത്തസ്തംഭങ്ങൾ പോലെ, പാദം വൃത്തമായ സ്തൂപികകളുമുണ്ട്:



ഇവയെ വൃത്തസ്തൂപികകൾ (cones) എന്നാണ് വിളിക്കുന്നത്.

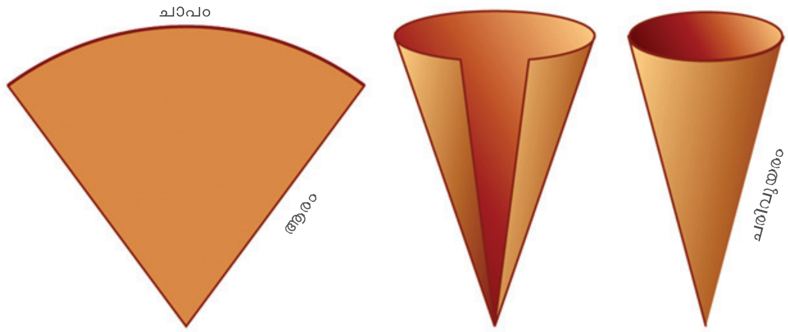
ചതുരം വളച്ച് വൃത്തസ്തംഭമുണ്ടാക്കിയതുപോലെ, ഒരു വൃത്താംശം വളച്ച് വൃത്തസ്തൂപികയുമുണ്ടാക്കാം. (അടഞ്ഞ സ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കണമെങ്കിൽ, ഒരു കൊച്ചു വൃത്തം വേറെയും വേണം.)



ഇതിൽ വളയ്ക്കുന്ന വൃത്താംശത്തിന്റെ അളവുകളും, ഉണ്ടാക്കിയ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ അളവുകളും തമ്മിലെന്താണ് ബന്ധം?

വൃത്തസ്തൂപിക

സമചതുരസ്തൂപിക പോലെ വൃത്തസ്തൂപികയും ജിയോജിബ്രയിൽ നിർമിക്കാം. Graphics ൽ ഒരു വൃത്തം വരച്ച് 3D Graphics ൽ Extrude to Pyramid or Cone ഉപയോഗിച്ച് വൃത്തസ്തൂപിക നിർമിക്കാം. ആവശ്യമെങ്കിൽ ആരവും ഉയരവും മാറ്റാൻ സ്ലൈഡറുകൾ ഉപയോഗിക്കാം.



വൃത്താംശത്തിന്റെ ആരം, സ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരമാകും; വൃത്താംശത്തിന്റെ ചാപനീളം, സ്തൂപികയുടെ പാദചുറ്റളവുമാകും.

വൃത്താംശത്തിന്റെ വലുപ്പം കേന്ദ്രകോണിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിലാണ് പലപ്പോഴും പറയുന്നത്. ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

> ആരം 12 സെന്റിമീറ്ററായ ഒരു വൃത്തത്തിൽ നിന്ന് $45°$ കേന്ദ്രകോണുള്ള വൃത്താംശം വെട്ടിയെടുത്തു. ഇതു വളച്ചുണ്ടാക്കുന്ന വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരവും പാദത്തിന്റെ ആരവും എത്രയാണ്?

സ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരം, വൃത്തത്തിന്റെ ആരമായ 12 സെന്റിമീറ്റർ തന്നെ. പാദത്തിന്റെ ആരമോ?

$45°$ എന്നത്, $360°$ യുടെ $\frac{1}{8}$ ഭാഗമാണല്ലോ. വൃത്താംശത്തിന്റെ ചാപത്തിന്റെ നീളം, കേന്ദ്രകോണിന് ആനുപാതികവുമാണ്. അപ്പോൾ ഈ വൃത്താംശത്തിന്റെ ചാപത്തിന്റെ നീളം, മൊത്തം വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ $\frac{1}{8}$ ഭാഗമാണ്. ഈ ചാപമാണ് സ്തൂപികയുടെ പാദവൃത്തം. അതായത്, സ്തൂപികയുടെ പാദവൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, വൃത്താംശം വെട്ടിയെടുത്ത വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ $\frac{1}{8}$ ഭാഗമാണ്. ആരങ്ങൾ, ചുറ്റളവുകൾക്ക് ആനുപാതികമായതിനാൽ, ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം, വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിന്റെ $\frac{1}{8}$ ഭാഗംതന്നെയാണ്. അതായത്, സ്തൂപികയുടെ പാദത്തിന്റെ ആരം

$12 \times \frac{1}{8} = 1.5$ സെന്റിമീറ്റർ.

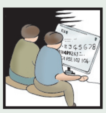
മറിച്ചൊരു ചോദ്യമായാലോ?

> പാദത്തിന്റെ ആരം 5 സെന്റിമീറ്ററും, ചരിവുയരം 15 സെന്റിമീറ്ററുമായ ഒരു വൃത്തസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കുന്നതെങ്ങനെ?

വൃത്തസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കാൻ, വൃത്താംശം വേണം. ചരിവുയരം 15 സെന്റിമീറ്റർ വേണമെന്നുള്ളതിനാൽ, 15 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള വൃത്തത്തിൽ നിന്നു തന്നെ വൃത്താംശം വെട്ടിയെടുക്കണം. അതിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ എത്രയായിരിക്കണം?

NT-887-4-MATHS-10-M-VOL.2

സ്തൂപികയുടെ പാദമായ ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം, വൃത്താംശം വെട്ടിയെടുക്കുന്ന വലിയവൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിന്റെ $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ ഭാഗമാണല്ലോ (അതെങ്ങനെ?). അപ്പോൾ ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവും, വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗമാണ്. ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, വൃത്താംശത്തിന്റെ ചാപനീളമാണല്ലോ. അപ്പോൾ വൃത്താംശത്തിന്റെ ചാപം, അതു വെട്ടിയെടുത്ത വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗമാണ്. അതിനാൽ, അതിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ $360 \times \frac{1}{3} = 120^\circ$.



(1) ആരം 10 സെന്റിമീറ്ററും കേന്ദ്രകോൺ 60° ഉം ആയ വൃത്താംശം വളച്ചുണ്ടാക്കുന്ന വൃത്തസ്തൂപികയുടെ പാദത്തിന്റെ ആരവും ചരിവുയരവും എത്രയാണ്?

(2) പാദത്തിന്റെ ആരം 10 സെന്റിമീറ്ററും, ചരിവുയരം 25 സെന്റിമീറ്ററുമായ വൃത്തസ്തൂപിക നിർമിക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്ന വൃത്താംശത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ എത്രയാണ്?

(3) ഒരു അർധവൃത്തം വളച്ചുണ്ടാക്കുന്ന വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആരവും ചരിവുയരവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

വക്രതലപരപ്പളവ്

വൃത്തസ്തംഭത്തിലെന്നപോലെ, വൃത്തസ്തൂപികയ്ക്കും ഒരു വക്രതലമുണ്ട്; അതിന്റെ ചരിഞ്ഞുയരുന്ന ഭാഗം. വൃത്തസ്തൂപിക വളച്ചുണ്ടാക്കാൻ ഉപയോഗിച്ച വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവാണ് ഈ വക്രതലത്തിന്റെ പരപ്പളവ്. (വൃത്തസ്തംഭത്തിലും, അതിന്റെ വക്രതലം ചുരുട്ടിയുണ്ടാക്കാൻ ഉപയോഗിച്ച ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവാണല്ലോ, വക്രതലപരപ്പളവ്.)

ജിയോജിബ്രയിൽ നിർമിച്ച വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രതല പരപ്പളവ് Algebra യിലെ Surface എന്നതിൽ കാണാം.

കണക്കു നോക്കുക.

ആരം 8 സെന്റിമീറ്ററും ചരിവുയരം 30 സെന്റിമീറ്ററുമായ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആകൃതിയിലുള്ള ഒരു തൊപ്പി ഉണ്ടാക്കാൻ എത്ര ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ കടലാസ് വേണം?

ഇത്തരമൊരു തൊപ്പിയുണ്ടാക്കാൻ വേണ്ട വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവാണ് കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത്. ചരിവുയരം 30 സെന്റിമീറ്റർ വേണ്ടതിനാൽ, ഇത്രയും ആരമുള്ള വൃത്തത്തിൽ നിന്നു വേണം, വൃത്താംശം മുറിച്ചെടുക്കാൻ.

കൂടാതെ, സ്തൂപികയുടെ പാദമായ കൊച്ചുവൃത്തത്തിന്റെ ആരം 8 സെന്റിമീറ്ററായിരിക്കണം. അതായത്, വൃത്താംശം വെട്ടിയെടുക്കുന്ന വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിന്റെ $\frac{8}{30} = \frac{4}{15}$ ഭാഗം. അപ്പോൾ, ചെറുവൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റ

ളവും, വൻവൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ ഇതേ ഭാഗമാണ്. ചെറു വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവാണ്, വെട്ടിയെടുക്കേണ്ട വൃത്താംശത്തിന്റെ ചാപത്തിന്റെ നീളം. ഇങ്ങനെ നോക്കുമ്പോൾ, വെട്ടിയെടുക്കേണ്ട വൃത്താംശം, വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{4}{15}$ ഭാഗമാണെന്നു കാണാം. അതിനാൽ, അതിന്റെ പരപ്പളവ്, ഈ വൃത്തത്തിന്റെ ഇതേ ഭാഗമാണ്. അതായത്

$$\pi \times 30^2 \times \frac{4}{15} = \pi \times 2 \times 30 \times 4 = 240\pi$$

അപ്പോൾ തൊപ്പിയുണ്ടാക്കാൻ 240π ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ കടലാസു വേണം. (ക്രിയചെയ്ത്, ഇത് ഏതാണ്ട് 754 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററാണെന്നു കാണാം.)

വക്രതലപരപ്പളവ്

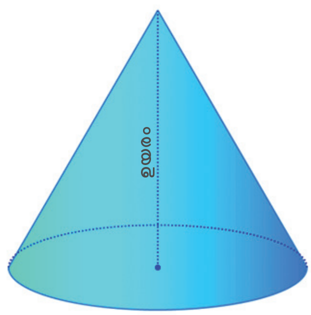
ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രതലപരപ്പളവ്, അതുണ്ടാക്കാനുപയോഗിച്ച വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവുതന്നെയാണല്ലോ. സ്തൂപികയുടെ പാദ ആരം r എന്നും, ചരിവുയരം l എന്നുമെടുത്താൽ, വൃത്താംശത്തിന്റെ ആരം l എന്നും, കേന്ദ്രകോൺ $\frac{r}{l} \times 360^\circ$ എന്നും കിട്ടും. അപ്പോൾ അതിന്റെ പരപ്പളവ്,

$$\frac{1}{360} \times \left(\frac{r}{l} \times 360\right) \times \pi l^2 = \pi r l$$

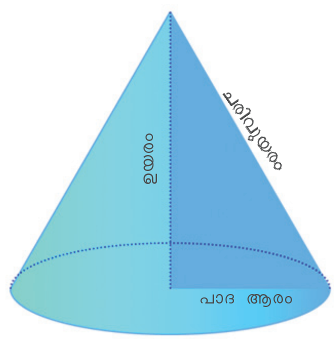
എന്നു കണക്കാക്കാം. (ഒമ്പതാം ക്ലാസിൽ വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിച്ചത് ഓർക്കുക.)

അതായത്, വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രതലപരപ്പളവ്, പാദചുറ്റളവിന്റേയും ചരിവുയരത്തിന്റേയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണ്.

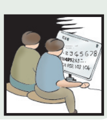
സമചതുരസ്തൂപികയിലെന്നപോലെ വൃത്തസ്തൂപികയിലും, പാദത്തിൽ നിന്ന് ശീർഷത്തിലേക്കുള്ള ലംബദൂരമാണ് ഉയരം. വൃത്തസ്തൂപികയിൽ, ഇത്, പാദമായ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും, ശീർഷവും തമ്മിലുള്ള അകലമാണ്.



സമചതുരസ്തൂപികയിലെന്നപോലെ വൃത്തസ്തൂപികയിലും, ഉയരവും ചരിവുയരവും തമ്മിലൊരു മട്ടത്രികോണബന്ധമുണ്ട്:



ഉദാഹരണമായി പാദത്തിന്റെ ആരം 5 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 10 സെന്റിമീറ്ററും ആയ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരം $\sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ സെന്റിമീറ്ററാണ്.



(1) പാദത്തിന്റെ ആരം 12 സെന്റിമീറ്ററും, ചരിവുയരം 25 സെന്റിമീറ്ററും ആയ ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രതല പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

(2) പാദത്തിന്റെ വ്യാസം 30 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 40 സെന്റിമീറ്ററുമായ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

(3) വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആകൃതിയിലുള്ള ഒരു പൂക്കുറ്റിയുടെ പാദവ്യാസം 10 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 12 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. ഇത്തരം 10000 പൂക്കുറ്റികളുടെ പുറംഭാഗം മുഴുവൻ വർണക്കടലാസ് ഒട്ടിക്കണം. ഒരു ചതുരശ്രമീറ്റർ വർണക്കടലാസിന് 2 രൂപയാണ് വില. ഇതിന് ആകെ എത്ര രൂപ ചെലവാകും?

(4) ഒരു അർധവൃത്തം വളച്ചുണ്ടാക്കുന്ന വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രതല പരപ്പളവ് അതിന്റെ പാദപരപ്പളവിന്റെ രണ്ടുമടങ്ങാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം

സമചതുരസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം കാണാൻ ചെയ്തതുപോലെ ഒരു പരീക്ഷണം ഇവിടെയുമാകാം. ഒരു വൃത്തസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കുക. അതേ പാദവും ഉയരവുമുള്ള ഒരു വൃത്തസ്തംഭവും. സ്തൂപികയിൽ മണൽ നിറച്ച് വൃത്തസ്തംഭത്തിലേക്ക് പകർന്നുനോക്കൂ. ഇവിടെയും സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം, വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ മൂന്നിലൊന്നാണെന്ന് കാണാം. അതായത്,

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം, പാദപരപ്പളവിന്റേയും ഉയരത്തിന്റേയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ മൂന്നിലൊന്നാണ്.

വൃത്തസ്തൂപികാവ്യാപ്തം

സ്തൂപികാവ്യാപ്തം എന്നഭാഗത്ത് ചെയ്തത്പോലെ ഒരേ പാദവും ഒരേ ഉയരവുമുള്ള ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയും ഒരു വൃത്തസ്തംഭവും നിർമിക്കുക. ഇവയുടെ വ്യാപ്തം താരതമ്യം ചെയ്യുക.

(ഇതിന്റെയും ഗണിതപരമായ വിശദീകരണം, പാഠത്തിന്റെ അവസാനം കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്).

ഉദാഹരണമായി, പാദത്തിന്റെ ആരം 4 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 6 സെന്റിമീറ്ററുമായ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം

$$\frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 6 = 32\pi$$ ഘനസെന്റിമീറ്ററാണ്.

(1) വൃത്തസ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ഒരു തടിക്കഷണത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെ ആരം 15 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 40 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. ഇതിൽ നിന്ന് ചെത്തിയെടുക്കാവുന്ന ഏറ്റവും വലിയ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം എത്രയാണ്?

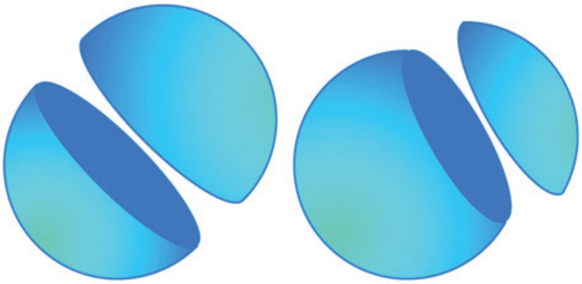
(2) പാദത്തിന്റെ ആരം 12 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 20 സെന്റിമീറ്ററുമായ കട്ടിയായ ഒരു വൃത്തസ്തംഭം ഉരുക്കി, പാദത്തിന്റെ ആരം 4 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 5 സെന്റിമീറ്ററുമായ എത്ര വൃത്തസ്തൂപികകൾ ഉണ്ടാക്കാം?

(3) 216° കേന്ദ്രകോണും 25 സെന്റിമീറ്റർ ആരവുമുള്ള ഒരു വൃത്താംശം വളച്ച് വൃത്തസ്തൂപിക ആക്കിയാൽ അതിന്റെ ആരവും ഉയരവും എത്രയായിരിക്കും? വ്യാപ്തമോ?

(4) രണ്ടു വൃത്തസ്തൂപികകളുടെ ആരങ്ങളുടെ അംശബന്ധം 3 : 5, അവയുടെ ഉയരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 3, അവയുടെ വ്യാപ്തങ്ങളുടെ അംശബന്ധം എത്രയാണ്?

(5) തുല്യവ്യാപ്തമുള്ള രണ്ടു വൃത്തസ്തൂപികകളുടെ ആരങ്ങൾ 4 : 5 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. അവയുടെ ഉയരങ്ങളുടെ അംശബന്ധം കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഗോളം



പന്തുകളിയുടെ ഹരമായും, ലഡ്ഡുവിന്റെ മധുരമായുമൊക്കെ ഗോളങ്ങൾ ആസ്വദിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഇനി ഗോളത്തിന്റെ ഗണിതമാവാം. (ഇംഗ്ലീഷിൽ ഗോളത്തിന് sphere എന്നാണു പേര്.)

വൃത്തസ്തംഭത്തിനെയോ, വൃത്തസ്തൂപികയെയോ പാദത്തിനു സമാന്തരമായി മുറിച്ചാൽ, വൃത്തം കിട്ടും. ഗോളത്തെ എങ്ങനെ മുറിച്ചാലും വൃത്തം കിട്ടും:

ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് അതിലെ ഏതു ബിന്ദുവിലേക്കുമുള്ള അകലം തുല്യമാണല്ലോ. ഗോളത്തിനുമുണ്ടൊരു കേന്ദ്രം; അതിൽ നിന്ന് ഗോളോപരിതലത്തിലുള്ള ബിന്ദുക്കൾക്കെല്ലാം ഒരേ അകലമാണ്. ഈ അകലത്തെ ഗോളത്തിന്റെ ആരം എന്നു പറയുന്നു; അതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങിനെ വ്യാസമെന്നും.

ഒരു ഗോളത്തെ കൃത്യം പകുതിയായി മുറിച്ചാൽ ഉണ്ടാകുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും ആരവും വ്യാസവുമൊക്കെയാണ്, ഗോളത്തിന്റെയും കേന്ദ്രവും ആരവും വ്യാസവും.

ഇതുവരെക്കണ്ട രൂപങ്ങളിൽ ചെയ്തപോലെ, ഗോളത്തെ മുറിച്ചു നിവർത്തി ഉപരിതലപരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിയില്ല. അൽപം ചുളിവോ, വലിച്ചുനീട്ടലോ ഇല്ലാതെ, ഗോളത്തെ മുറിച്ചു നിരപ്പാക്കാൻ കഴിയില്ല എന്നതാണു കാര്യം.

എന്നാൽ ഒരു ഗോളത്തിന്റെ ആരം r എന്നെടുത്താൽ, ഉപരിതലപരപ്പളവ് $4\pi r^2$ ആണെന്നു തെളിയിക്കാം. (വിശദീകരണം പാഠത്തിന്റെ അവസാനം ചേർത്തിട്ടുണ്ട്).

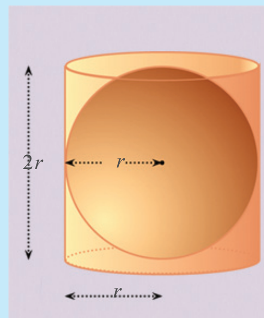
മറ്റൊരുരീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ

ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്, അതിന്റെ ആരത്തിന്റെ വർഗത്തിനെ 4π കൊണ്ട് ഗുണിച്ചതാണ്.

കൂടാതെ ആരം r ആയ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $\frac{4}{3}\pi r^3$ എന്ന് തെളിയിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്. (ഇതിന്റെയും വിശദീകരണം പാഠത്തിന്റെ അവസാനം കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്).

ഗോളവും സ്തംഭവും

ഒരു ഗോളത്തിനെ കൃത്യമായി പൊതിയുന്ന വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ ആരം, ഗോളത്തിന്റെ തന്നെ ആരവും ഉയരം, ഈ ആരത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങുമാണല്ലോ:



അതായത്, ഗോളത്തിന്റെ ആരം r എന്നെടുത്താൽ, വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ ആരം r, ഉയരം $2r$. അപ്പോൾ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്.

$$(2\pi r \times 2r) + (2 \times \pi r^2) = 6\pi r^2$$

ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് $4\pi r^2$. ഈ രണ്ടു പരപ്പളവുകളും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $3 : 2$

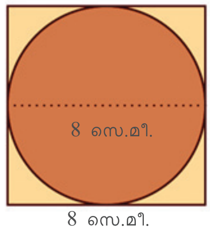
മാത്രവുമല്ല, സ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

$$\pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3 \text{ ഉം}$$

ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $\frac{4}{3}\pi r^3$ ഉം ആയതിനാൽ, വ്യാപ്തങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധവും $3 : 2$ തന്നെ.

ഈ കണക്ക് നോക്കൂ:

വക്കുകളുടെയെല്ലാം നീളം 8 സെന്റിമീറ്ററായ ഒരു സമചതുരക്കട്ടയിൽ നിന്ന് ചെത്തിയെടുക്കാവുന്ന ഏറ്റവും വലിയ ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

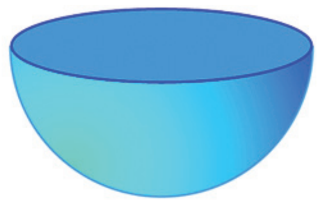


ഗോളത്തിന്റെ വ്യാസം, സമചതുരക്കട്ടയുടെ വക്കിന്റെ നീളമാണെന്ന് ചിത്രത്തിൽനിന്നു കാണാമല്ലോ. അപ്പോൾ ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്

$$4\pi \times 4^2 = 64\pi$$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

മറ്റൊരു കണക്കുനോക്കാം:

12 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള കട്ടിയായ ഒരു ഗോളത്തെ രണ്ടു സമഭാഗങ്ങളായി മുറിച്ചു കിട്ടുന്ന ഒരു അർധഗോളത്തിന്റെ (hemisphere) ഉപരിതലപരപ്പളവ് എത്രയാണ്?



ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലത്തിന്റെ പകുതിയും ഒരു വൃത്തവും ചേർന്നതാണല്ലോ അർധഗോളം.

ഗോളത്തിന്റെ ആരം 12 സെന്റിമീറ്റർ ആയതിനാൽ, അതിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്

$$4\pi \times 12^2 = 576\pi$$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

ഇതിന്റെ പകുതിയും വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവും ചേർന്നതാണ് അർധഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്. വൃത്തത്തിന്റെ ആരവും 12 സെന്റിമീറ്റർ തന്നെ ആയതിനാൽ, അതിന്റെ പരപ്പളവ്

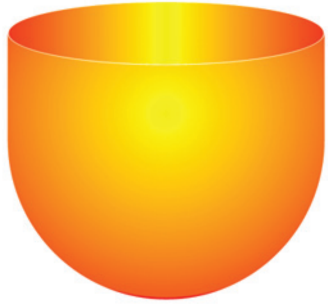
$$\pi \times 12^2 = 144\pi$$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

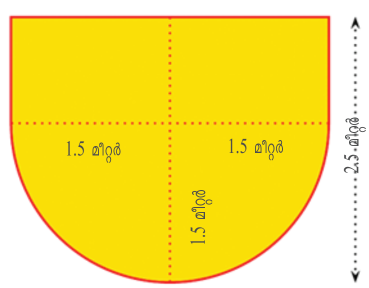
അപ്പോൾ അർധഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്

$$\frac{1}{2} \times 576\pi + 144\pi = 432\pi$$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

ഒരു ഉദാഹരണം കൂടിയാകാം:

വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ ഒരറ്റത്ത് അർധഗോളം ഘടിപ്പിച്ച രൂപത്തിലുള്ള ഒരു ജലസംഭരണിയുടെ ആകെ ഉയരം 2.5 മീറ്ററും, പാദത്തിന്റെ ആരം 1.5 മീറ്ററുമാണ്. ഇതിൽ എത്ര ലിറ്റർ വെള്ളം കൊള്ളും?





ടാങ്കിലെ അർധഗോളഭാഗത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

$$\frac{2}{3}\pi \times (1.5)^3 = 2.25\pi \text{ ഘനമീറ്റർ}$$

വൃത്തസ്തംഭഭാഗത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

$$\pi \times (1.5)^2 (2.5 - 1.5) = 2.25\pi \text{ ഘനമീറ്റർ}$$

അപ്പോൾ ടാങ്കിന്റെ ആകെ വ്യാപ്തം

$$2.25\pi + 2.25\pi = 4.5\pi \approx 14.13 \text{ ഘനമീറ്റർ}$$

ഒരു ഘനമീറ്റർ എന്നത്, 1000 ലിറ്ററായതിനാൽ, ടാങ്കിൽ ഏകദേശം 14130 ലിറ്റർ വെള്ളം കൊള്ളും.

(1) കട്ടിയായ ഒരു ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് 120 ചതുരശ്രസെന്റി മീറ്ററാണ്. അത് മുറിച്ച് രണ്ട് അർധഗോളങ്ങളാക്കിയാൽ ഓരോന്നിന്റെയും ഉപരിതലപരപ്പളവ് എന്തായിരിക്കും?

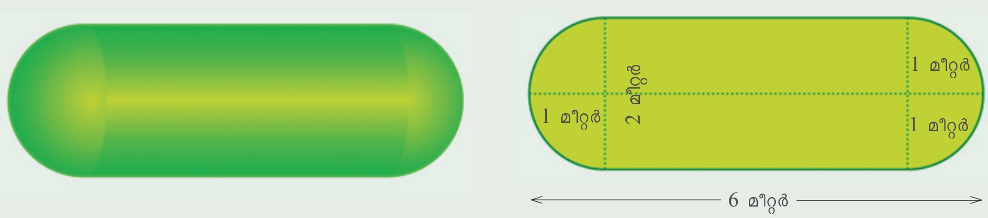
(2) രണ്ടു ഗോളങ്ങളുടെ വ്യാപ്തങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 27 : 64 ആണ്. അവയുടെ ആരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്? ഉപരിതലപരപ്പളവുകളുടെ അംശബന്ധമോ?

(3) ലോഹം കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ ഒരു വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ നീളം 10 സെന്റിമീറ്ററും, ആരം 4 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. ഇതുരുക്കി, 2 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള എത്ര ഗോളങ്ങളുണ്ടാക്കാം?

(4) 12 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള ഒരു ലോഹഗോളത്തെ ഉരുക്കി തുല്യവലുപ്പമുള്ള കട്ടിയായ 27 ചെറുഗോളങ്ങളുണ്ടാക്കി. ചെറുഗോളങ്ങളുടെ ആരമെന്തായിരിക്കും?

(5) 10 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള കട്ടിയായ ഒരു ഗോളത്തിൽനിന്ന്, 16 സെന്റിമീറ്റർ ഉയരവും പരമാവധി വലുപ്പവുമുള്ള ഒരു വൃത്തസ്തൂപിക വെട്ടിയെടുത്തു. സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം, ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ്?

(6) ഒരു പെട്രോൾ ടാങ്കിന്റെ ചിത്രമാണ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്:



ഇതിൽ എത്ര ലിറ്റർ പെട്രോൾ കൊള്ളും?

(7) കട്ടിയായ ഒരു ഗോളം, രണ്ട് അർധഗോളങ്ങളായി മുറിച്ച്, ഒന്നിൽനിന്ന് പരമാവധി വലുപ്പമുള്ള സമചതുരസ്തൂപികയും, മറ്റൊന്നിൽനിന്ന് പരമാവധി വലുപ്പമുള്ള വൃത്തസ്തൂപികയും മുറിച്ചെടുക്കുന്നു. ഇവയുടെ വ്യാപ്തം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

5KFNEG

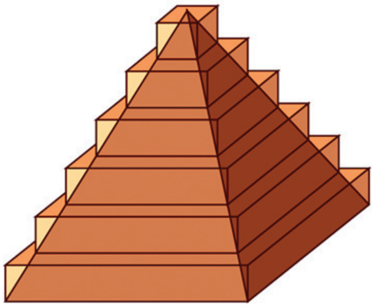
കട്ടിയായ ഒരു അർധഗോളത്തിൽനിന്ന് ചെത്തിയെടുക്കുന്ന പരമാവധി വലിയ സമചതുരസ്തൂപികയുടെ പാർശ്വമുഖങ്ങളുടെ പ്രത്യേകത എന്താണ്?

അനുബന്ധം

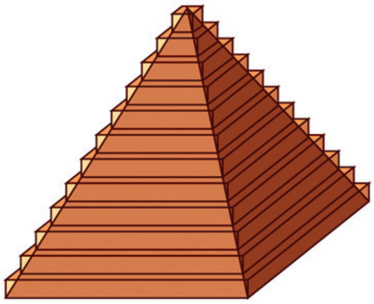
സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തവും, ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവും, വ്യാപ്തവും കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ക്രിയകൾ മാത്രമാണല്ലോ കണ്ടത്. ഇവ എങ്ങനെ കിട്ടി എന്നറിയാൻ താത്പര്യമുള്ളവർക്ക് വേണ്ടി, അവയുടെ വിശദീകരണങ്ങൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

സമചതുരസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം

ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ഏകദേശ രൂപമായി കുറെ സമചതുരപ്പലകകളുടെ കൂട്ടം സങ്കൽപിക്കാം.



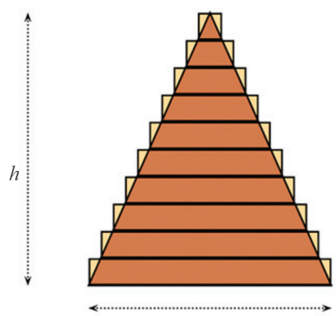
പലകകളുടെ കനം കുറയുകയും, എണ്ണം കൂടുകയും ചെയ്യുന്നതിനനുസരിച്ച്, അവയുടെ അടുക്ക് കൂടുതൽ സ്തൂപികാസമാനമാകും.



അപ്പോൾ ഈ പലകകളുടെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ തുക, സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തത്തോട് അടുത്തടുത്തു വരും.

ഉദാഹരണമായി, 10 പലകകളാണ് ഉപയോഗിച്ചതെന്നു കരുതുക. ഓരോ പലകയും ഒരു സമചതുരസ്തംഭമാണല്ലോ; ഇവയുടെ ഉയരം തുല്യമായിട്ടെടുക്കാം. അപ്പോൾ സ്തൂപികയുടെ ഉയരം h എന്നെടുത്താൽ, ഒരു പലകയുടെ ഉയരം $\frac{1}{10}h$. ഇനി ഓരോ പലകയുടേയും പാദം എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

സ്തൂപികയേയും അതിനെ പൊതിഞ്ഞു നിൽക്കുന്ന പലകകളുടെ അടുക്കിനേയും ശീർഷത്തിലൂടെ കുത്തനെ മുറിച്ചാൽ, ഇത്തരമൊരു രൂപം കിട്ടും:



മുകളിൽനിന്നു തുടങ്ങി, സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങൾ വലുതായി വരുന്നുണ്ടല്ലോ; ഇവയുടെ ഉയരം വർധിക്കുന്നത്, ഓരോ പലകയിലും $\frac{1}{10}h$ എന്ന നിര

ക്കിലാണ്. ഇവയെല്ലാം സദൃശമായതിനാൽ (എന്തുകൊണ്ട്?) പാദങ്ങളും ഇതേ നിരക്കിൽത്തന്നെ കൂടണം. അതായത്, സ്തൂപികയുടെ പാദം b എന്നെടുത്താൽ, മുകളിൽനിന്നുള്ള ത്രികോണങ്ങളുടെ പാദം $\frac{1}{10}b, \frac{2}{10}b, ..., b$ എന്നിങ്ങനെയാണ്.

അപ്പോൾ ഈ പലകകളുടെ വ്യാപ്തം

$$\left(\frac{1}{10}b\right)^2 \times \frac{1}{10}h, \left(\frac{2}{10}b\right)^2 \times \frac{1}{10}h, ...b^2 \times \frac{1}{10}h$$

എന്നിങ്ങനെയാണ്, അവയുടെ തുകയോ?

$$\frac{1}{10}b^2h\left(\frac{1}{10^2}+\frac{2^2}{10^2}+...+\frac{9^2}{10^2}+\frac{10^2}{10^2}\right) = \frac{1}{1000}b^2h\left(1^2+2^2+3^2+...+10^2\right)$$

ഇത്തരം തുകകൾ കണ്ടുപിടിക്കാനൊരു മാർഗം, **സമാന്തരശ്രേണികൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **വർഗങ്ങളുടെ തുകകൾ** എന്ന ഭാഗത്തു പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലോ.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 10^2 = \frac{1}{6} \times 10 \times (10 + 1) \times (2 \times 10 + 1)$$

അപ്പോൾ വ്യാപ്തത്തിന്റെ തുക

$$\frac{1}{1000}b^2h\times\frac{1}{6}\times10\times11\times21=\frac{1}{6}b^2h\times\frac{10}{10}\times\frac{11}{10}\times\frac{21}{10}=\frac{1}{6}b^2h\times1.1\times2.1$$

ഇനി ഇതുപോലെ 100 പലകകൾ സങ്കൽപ്പിച്ചു നോക്കൂ (അതേതായാലും വരയ്ക്കാൻ കഴിയില്ല).

പലകകളുടെ കനം $\frac{1}{100}h$ ആകും; പാദങ്ങളുടെ വശം $\frac{1}{100}b, \frac{2}{100}b, \frac{3}{100}b, ..., b$ എന്നിങ്ങനെയാകും. വ്യാപ്തങ്ങളുടെ തുക

$$\frac{1}{100^3}b^2h\left(1^2+2^2+3^2+...+100^2\right) = \frac{1}{100^3}b^2h\times\frac{1}{6}\times100\times101\times201$$

$$=\frac{1}{6}b^2h\times\frac{100}{100}\times\frac{101}{100}\times\frac{201}{100}$$

$$=\frac{1}{6}b^2h\times1.01\times2.01$$

പലകകളുടെ എണ്ണം 1000 ആക്കിയാലോ? കണക്കുകൂട്ടാതെ തന്നെ വ്യാപ്തങ്ങളുടെ തുക

$$\frac{1}{6}b^2h\times1.001\times2.001$$

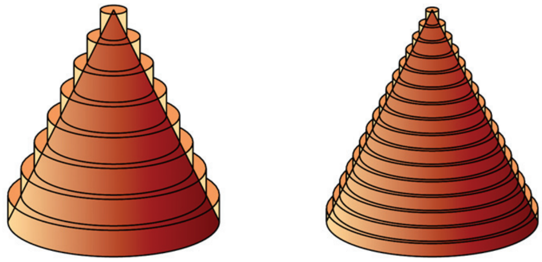
എന്നു കാണാമല്ലോ. ഈ തുകകൾ ഏതു സംഖ്യയോടാണ് അടുത്തടുത്തു വരുന്നത്?

ഇതാണ് സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം. അതായത്

$$\frac{1}{6}b^2h\times1\times2=\frac{1}{3}b^2h$$

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം

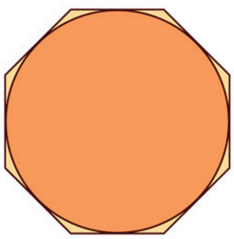
സമചതുരപ്പലകകളടുക്കി, സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ഏകദേശം രൂപങ്ങളുണ്ടാക്കിയതുപോലെ, വട്ടപ്പലകകളടുക്കി വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഏകദേശരൂപങ്ങൾ ചമയ്ക്കാം:



ഇതിലൂടെ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തവും കണ്ടുപിടിക്കാം (ശ്രമിച്ചു നോക്കൂ)

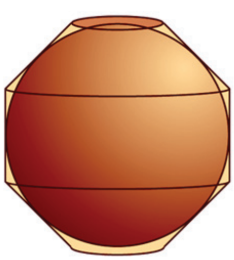
ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്

ഇതിന്, ആദ്യം ഗോളത്തിന്റെ മധ്യത്തുകൂടിയുള്ള ഒരു വൃത്തവും വശങ്ങളെല്ലാം അതിനെ തൊടുന്ന ഒരു സമബഹുഭുജവും സങ്കൽപ്പിക്കുക.



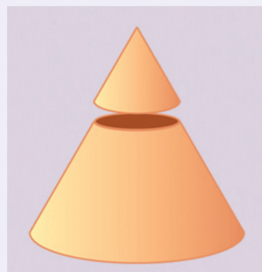
ഇനി ഈ രൂപം ഒന്നു കറങ്ങിയാൽ, ഉള്ളിലൊരു ഗോളവും, പുറത്തു മറ്റൊരു രൂപവും കിട്ടും;

ഈ ചിത്രത്തിൽ, പുറത്തുള്ള രൂപത്തിനെ രണ്ടു വൃത്തസ്തൂപികാപീഠവും, ഒരു വൃത്തസ്തംഭവുമായി ഭാഗിക്കാം:



ചെറുതും വലുതും

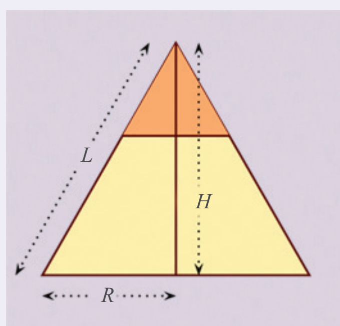
ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയെ പാദത്തിനു സമാന്തരമായി മുറിച്ചാൽ, മുകളിലൊരു കൊച്ചു വൃത്തസ്തൂപിക കിട്ടും.

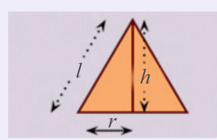


ചെറിയ സ്തൂപികയുടെ അളവുകളും വലിയ സ്തൂപികയുടെ അളവുകളും തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?

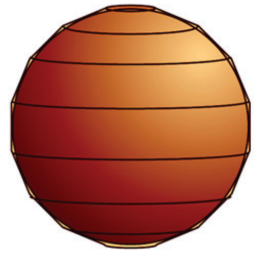
പാദത്തിന്റെ ആരം, ഉയരം, ചരിവുയരം ഇവയെല്ലാം വലിയ സ്തൂപികയ്ക്ക് R, H, L എന്നും ചെറുതിന് r, h, l എന്നുമെടുത്താൽ, ചിത്രങ്ങളിൽ നിന്ന്

$$\frac{r}{R}=\frac{h}{H}=\frac{l}{L}$$



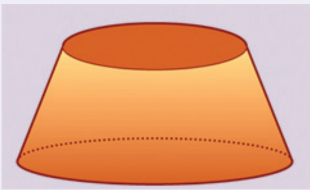


ബഹുഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുന്നതനുസരിച്ച്, പുറത്തെ രൂപം, ഗോളത്തോട് കൂടുതൽ അടുക്കും:

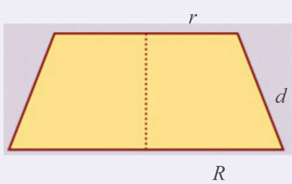


വൃത്തസ്തൂപികാ പീഠം

ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയുടെ മുകളിൽനിന്ന് ഒരു കൊച്ചു വൃത്തസ്തൂപിക വെട്ടിയെടുത്താൽ താഴെ മിച്ചം വരുന്ന ഭാഗത്തിന് വൃത്തസ്തൂപികാ പീഠം (frustum of a cone) എന്നാണ് പേര്.



ഒരു വൃത്തസ്തൂപികാപീഠത്തിന്റെ മുകളിലത്തെയും താഴത്തെയും വൃത്തങ്ങളുടെ ആരവും, ചരിവുയരവും അറിയാമെങ്കിൽ പാർശ്വതലപരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുന്നതെങ്ങനെ?



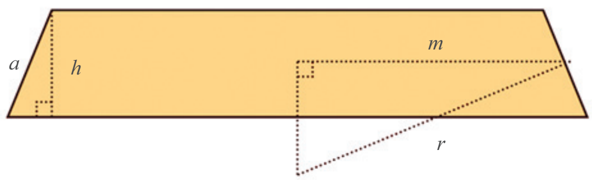
വലിയ സ്തൂപികയുടെയും, ചെറിയ സ്തൂപികയുടെയും ചരിവുയരങ്ങൾ L, l എന്നെടുത്താൽ, ചിത്രത്തിൽ $d = L - l$. അപ്പോൾ പീഠത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ്,

$$\begin{aligned}\pi RL - \pi rl &= \pi(RL - rl)\\ &= \pi\big(R(l+d) - rl\big)\\ &= \pi(Rl + Rd - rl)\end{aligned}$$

ഇതിൽ നേരത്തെ കണ്ടതനുസരിച്ച്, $\frac{r}{R} = \frac{l}{L}$ ആയതിനാൽ, $Rl = rL$ എന്നു കിട്ടും. അപ്പോൾ പീഠത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ്.

$$\begin{aligned}\pi(rL + Rd - rl) &= \pi\big(r(L-l) + Rd\big)\\ &= \pi(rd + Rd)\\ &= \pi(r+R)d\end{aligned}$$

ഈ സ്തൂപികാപീഠങ്ങളുടെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കാൻ, അവയിൽ ഒന്നെടുത്തു നോക്കാം. ഇതിന്റെ മധ്യത്തുകൂടിയുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ ആരം m എന്നും, ഉയരം h എന്നുമെടുക്കാം. വൃത്തത്തിന്റെ ആരം r എന്നും, അതിനെ പൊതിയുന്ന ബഹുഭുജത്തിന്റെ ഒരു വശം a എന്നുംകൂടി എടുത്താൽ, ചുവടെക്കാണുന്ന ചിത്രം കിട്ടും.



ഇതിലെ രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങൾ സദൃശമാകയാൽ

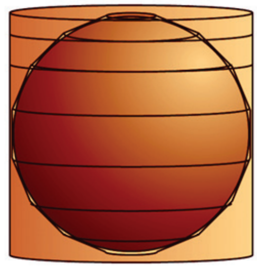
$$\frac{m}{r} = \frac{h}{a}$$

എന്നു കാണാം. അതായത്

$$am = rh$$

ഇതു കറങ്ങിയുണ്ടാകുന്ന പീഠത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ് $2\pi ma$ ആണെന്ന് **പീഠവും സ്തംഭവും** എന്ന ഭാഗത്തു കാണാം (അവസാനത്തെ പുറം). മുകളിലെ സമവാക്യപ്രകാരം, ഇത് $2\pi rh$ നു തുല്യമാണ്. അതായത്, പാദത്തിന്റെ ആരം r ഉം, ഉയരം h ഉം ആയ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ്.

അപ്പോൾ എന്തുകിട്ടി? മുകളിൽ കണ്ട ഗോളത്തിന്റെ ഏകദേശരൂപത്തിലെ ഓരോ സ്തൂപികാപീഠത്തിന്റെയും പാർശ്വതലപരപ്പളവ്, അതേ ഉയരവും, ഗോളത്തിന്റെ ആരവുമായ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവാണ്.



അതിനാൽ, ഈ ഏകദേശരൂപത്തിന്റെ ആകെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ്, ഈ വൃത്തസ്തംഭങ്ങളുടെ ആകെ പാർശ്വതലപരപ്പളവാണ്. ഈ വൃത്തസ്തംഭങ്ങൾ കൂട്ടിവച്ചാൽ കിട്ടുന്നതോ? വലിയൊരു വൃത്തസ്തംഭം:

വൃത്തത്തെ പൊതിയുന്ന ബഹുഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുന്നതനുസരിച്ച് അത് കൂടുതൽ വൃത്തസമാനമാകും; ഗോളത്തെ പൊതിയുന്ന രൂപം, ഗോളസമാനമാകും. ഇപ്പോൾ കണ്ടതനുസരിച്ച്, വശങ്ങൾ എത്ര കൂടിയാലും, ഈ രൂപത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ്, ഗോളത്തെ പൊതിയുന്ന വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവാണ്. അപ്പോൾ ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവും, അതിനെ പൊതിയുന്ന വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ് തന്നെ. വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെ ആരം r ഉം, ഉയരം $2r$ ഉം ആയതിനാൽ അതിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ്

$$2\pi \times r \times 2r = 4\pi r^2$$

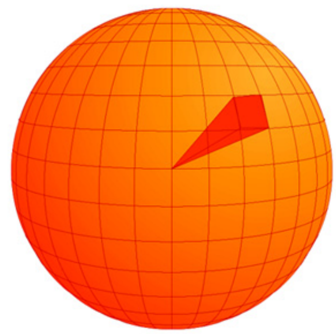
ഇതുതന്നെയാണ് ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവും.

5KPJG4

ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കുക:

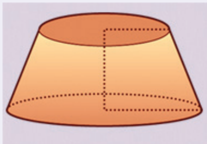
നെടുകെയും കുറുകെയുമുള്ള വൃത്തങ്ങൾ കൊണ്ട് ഗോളത്തിനെ കളങ്ങളായി തിരിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇത്തരമൊരു കളത്തിന്റെ മൂലകളെ ഗോളകേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ, സമചതുരസ്തൂപിക പോലുള്ള ഒരു രൂപം കിട്ടും:



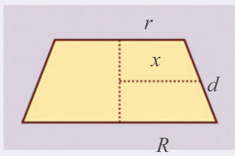
ഇത്തരം രൂപങ്ങൾ ചേർന്നതാണ് ഗോളം; അതിനാൽ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം ഈ രൂപങ്ങളുടെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ തുകയാണ്. ഇനി ഗോളത്തിലെ കളങ്ങളോരോന്നിനേയും, ഗോളത്തെ തൊടുന്ന ചെറു സമചതുരങ്ങളാക്കിമാറ്റിയാൽ, ഗോളത്തെ പൊതിയുന്ന ഒരു രൂപം കിട്ടും; അത് ശരിയായ സമചതുരസ്തൂപികകൾ യോജിപ്പിച്ചതാണ്. ഈ സ്തൂപികകളുടെയെല്ലാം ഉയരം, ഗോളത്തിന്റെ ആരം തന്നെയാണ്. ഇത് r എന്നും, ഒരു സ്തൂപികയുടെ പാദപരപ്പളവ് a എന്നുമെടുത്താൽ, അതിന്റെ വ്യാപ്തം $\frac{1}{3}ar$ എന്നു കിട്ടും. ഗോളത്തെ പൊതിഞ്ഞുനിൽക്കുന്ന രൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം. ഈ സ്തൂപികകളുടെ വ്യാപ്ത

പീഠവും സ്തംഭവും

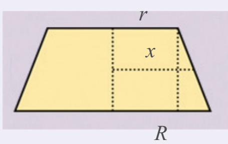
ചിത്രത്തിലെ വൃത്തസ്തൂപികാപീഠത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ് $\pi(r + R)d$ എന്നു കണ്ടല്ലോ.



ഇതിന്റെ മധ്യത്തുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ ആരം x എന്നെടുത്താൽ ഇങ്ങനെയൊരു ചിത്രം കിട്ടും:



ഇങ്ങനെ ഒരു വരകൂടി വരച്ചാലോ?



വലതുവശത്തെ രണ്ടു സദൃശമട്ടത്രികോണങ്ങളിൽനിന്ന്,

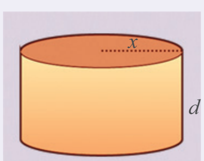
$$\frac{x - r}{R - r} = \frac{1}{2}$$

എന്നു കാണാം. ഇതു ലഘൂകരിച്ചാൽ

$$x = \frac{1}{2}(R + r)$$

എന്നു കിട്ടും. അതായത്, പീഠത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ്, $2\pi xd$

ഇത്, പാദത്തിന്റെ ആരം x ഉം, ഉയരം d യും ആയ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവല്ലേ?



ത്തിന്റെ തുകയാണല്ലോ. സ്തൂപികകളുടെയെല്ലാം പാദങ്ങൾ ചേർന്നാൽ, ഈ രൂപത്തിന്റെ ഉപരിതലവുമാകും. അപ്പോൾ ഈ സ്തൂപികകളുടെയെല്ലാം പാദപ്പരപ്പളവുകളുടെ തുക, ഈ രൂപത്തിന്റെ ഉപരിതല പരപ്പളവാണ്. അത് s എന്നെടുത്താൽ, രൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $\frac{1}{3}sr$ എന്നുകിട്ടും.

ഗോളത്തിലെ കളങ്ങൾ ചെറുതാകുകയും അവയുടെ എണ്ണം കൂടുകയും ചെയ്യുന്തോറും ഗോളത്തെ പൊതിയുന്ന രൂപം കൂടുതൽ ഗോളത്തോടടുക്കും; s എന്നത്, ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവിനോടും. അത് $4\pi r^2$ ആണെന്നു കണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ ഗോളത്തെ പൊതിയുന്ന രൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

$$\frac{1}{3} \times 4\pi r^2 \times r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

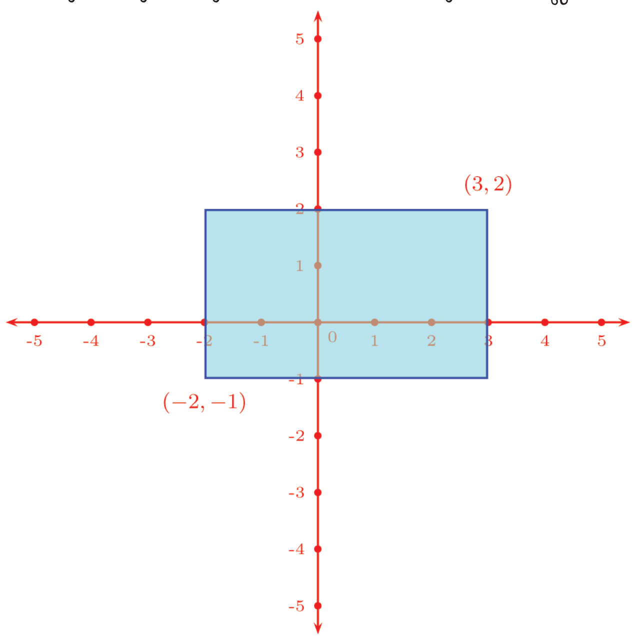
എന്ന സംഖ്യയോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു. ഇതു തന്നെയാണ് ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം.

9

ജ്യാമിതിയും ബീജഗണിതവും

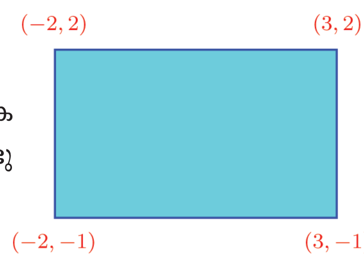
ത്രികോണക്കണക്കുകൾ

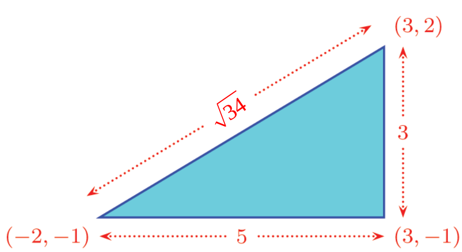
രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര ഏതെങ്കിലും അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമല്ലെങ്കിൽ, അവ എതിർമൂലകളായും, വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായും ഒരു ചതുരം വരയ്ക്കാമെന്നു കണ്ടല്ലോ:



A എന്ന പേരിൽ ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. Input Bar ൽ (x(A) + 3, y(A) + 2) എന്നു നൽകി നോക്കൂ. ഇങ്ങനെ ലഭിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകളുടെ പ്രത്യേകത എന്താണ്? A യുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ. മുകളിൽ നൽകിയ നിർദ്ദേശത്തിന്റെ അർഥമെന്താണ്?

മാത്രമല്ല, അക്ഷങ്ങൾ നോക്കാതെ, ആദ്യത്തെ രണ്ടു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകളിൽ നിന്ന് ചതുരത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കാമെന്നും കണ്ടു:





ഇത്തരമൊരു ചതുരം ഉപയോഗിച്ചാണ്, ഇങ്ങനെയുള്ള രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകളിൽ നിന്ന് അവ തമ്മിലുള്ള അകലം കണക്കാക്കിയത്. ശരിക്കു പറഞ്ഞാൽ, ഈ കണക്കുകൂട്ടലിൽ ചതുരം മുഴുവൻ ഉപയോഗിച്ചിട്ടില്ല; അതിന്റെ പകുതിയായ മട്ടത്രികോണം മാത്രമേ ഉപയോഗിച്ചുള്ളൂ.

ജ്യാമിതിയുടെ ബീജഗണിതം

സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള പൊതുവായ ബന്ധങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചാണല്ലോ. അധിസംഖ്യകളുടെ ഇത്തരം ചില ബന്ധങ്ങളെ ജ്യാമിതീയമായി വിശദീകരിക്കാമെന്നും കണ്ടിട്ടുണ്ട്.

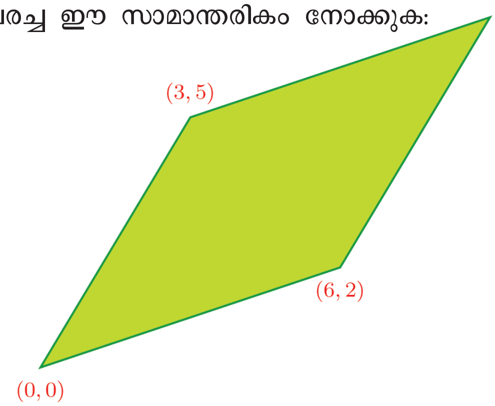
ഒരു തലത്തിലെ ബിന്ദുക്കളെയെല്ലാം, സംഖ്യാജോടികൾകൊണ്ടു സൂചിപ്പിച്ചാൽ, ഈ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള പൊതുവായ ബന്ധങ്ങളേയും, ബിന്ദുക്കൾ ചേർന്നുണ്ടാകുന്ന ചിത്രങ്ങളേയുമെല്ലാം ബീജഗണിതഭാഷയിൽ എഴുതാം.

ഒരു മൂല (0, 0) ഉം, അതിനോടടുത്ത രണ്ടു മൂലകൾ (x_1, y_1) ഉം (x_2, y_2) ഉം ആയ സാമാന്തരികത്തിന്റെ നാലാംമൂല $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ ആണെന്ന കാര്യം, ജ്യാമിതീയഗുണങ്ങളെ ബീജഗണിതഭാഷയിൽ എഴുതുന്നതിന്റെ ഒരുദാഹരണമാണ്.

A (0, 0) എന്ന ബിന്ദുവും B, C എന്നിങ്ങനെ മറ്റു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളും അടയാളപ്പെടുത്തുക. Input Bar ൽ (x(B) + x (C), y(B) + y (C)) എന്നു നൽകിയാൽ D എന്ന ഒരു ബിന്ദു ലഭിക്കും. ABCD എന്ന ചതുർഭുജം വരയ്ക്കുക. ഇത് ഒരു സാമാന്തരികമല്ലേ? എന്തുകൊണ്ട്? B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ.

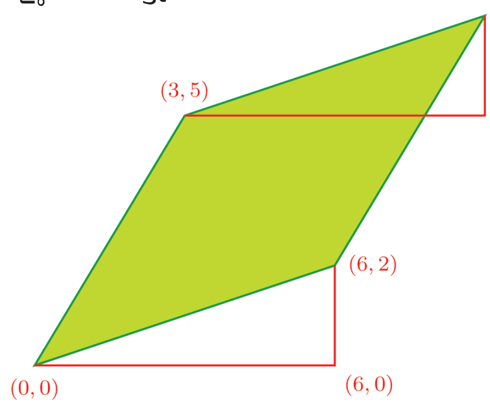
ഒരു ത്രികോണം ABC വരച്ച് അതിന്റെ മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. Move ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണത്തിനെ വലത്തേക്ക് 3 അകലം നീക്കി നോക്കൂ. മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾക്ക് എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നത്? ഇങ്ങനെ ലഭിച്ച ത്രികോണത്തിനെ മുകളിലേക്ക് 2 അകലം നീക്കുക. സൂചകസംഖ്യകൾക്ക് എന്തു സംഭവിക്കുന്നു? ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെയും അവസാനം ലഭിച്ച ത്രികോണത്തിന്റെയും മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ്? ത്രികോണത്തിനുപകരം ഒരു സാമാന്തരികം വരച്ച് ഇതു ചെയ്തുനോക്കൂ.

ഇങ്ങനെ മട്ടത്രികോണങ്ങൾ വരച്ചുള്ള കണക്കുകൂട്ടലുകൾ പല സന്ദർഭങ്ങളിലും ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, ആധാരബിന്ദുവും മറ്റു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളും മൂലകളായി വരച്ച ഈ സാമാന്തരികം നോക്കുക:



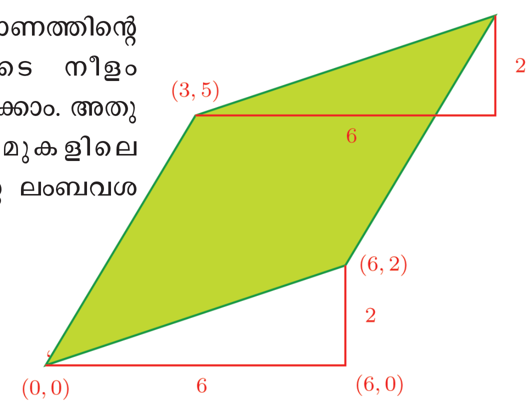
ഇതിന്റെ നാലാം മൂല കണ്ടുപിടിക്കണം.

അതിന് മുകളിലെയും താഴത്തെയും വശങ്ങൾ കർണങ്ങളും, അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായ വരകൾ ലംബവശങ്ങളുമായി മട്ടത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കാം:

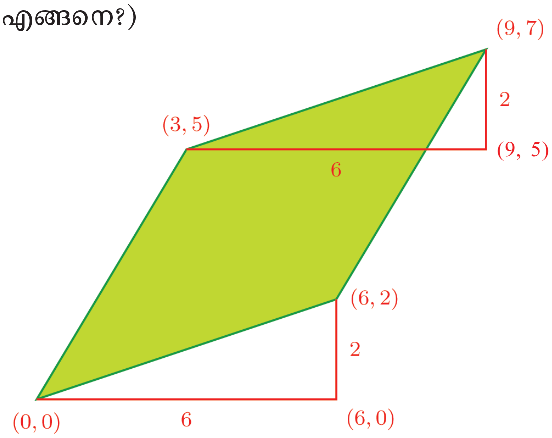


ഈ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും കർണവും, അതിലുള്ള രണ്ടു കോണുകളും തുല്യമാണ് (കാരണം?). അതിനാൽ അവയുടെ ലംബവശങ്ങളും തുല്യമാണ്.

താഴത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങളുടെ നീളം എളുപ്പം കണക്കാക്കാം. അതു തന്നെയാണ് മുകളിലെ ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങളുടെ നീളവും.



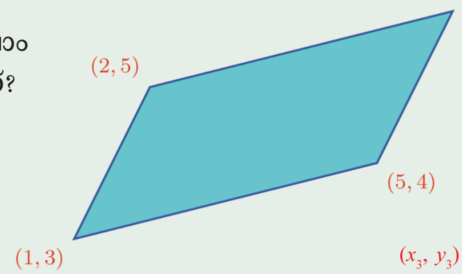
ഇനി മുകളിലെ ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വലതു മൂല (9, 5) എന്നും, തുടർന്ന് ത്രികോണത്തിന്റെ മേൽമൂല (9, 7) എന്നും കണക്കാക്കാമല്ലോ. (എങ്ങനെ?)



ജിയോജിബ്രയിൽ വരച്ച ഒരു രൂപത്തെ ആവശ്യാനുസരണം നീക്കുന്നതിന് Translate by Vector ടൂൾ ഉപയോഗിക്കാം. ഒരു സാമാന്തരികം വരച്ച് അതിനെ വലത്തേക്ക് 3 ഉം മുകളിലേക്ക് 2 ഉം നീക്കണം എന്നിരിക്കട്ടെ. ഇതിനായി (0, 0), (3, 2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. Translate by Vector ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ആദ്യം സാമാന്തരികത്തിലും പിന്നീട് (0, 0), (3, 2) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലും ക്രമമായി ക്ലിക്കുചെയ്യുക. സാമാന്തരികത്തിന്റെ മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾക്കു വരുന്ന മാറ്റമെന്താണ്? (3, 2) നുപകരം മറ്റൊരു ബിന്ദു എടുത്ത് നോക്കൂ.

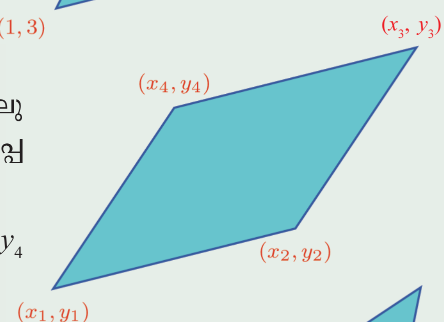
A, B, C എന്നിങ്ങനെ മൂന്നു ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക.
(x(B) + x(C) - x(A), y(B) + y(C) - y(A)) എന്ന് Input Bar ൽ കൊടുത്താൽ D എന്ന ഒരു ബിന്ദു കിട്ടും. ABCD ഒരു സാമാന്തരികമാണോ? എന്തുകൊണ്ട്?

(1) ചിത്രത്തിലെ സാമാന്തരികത്തിന്റെ നാലാം മൂലയുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്താണ്?

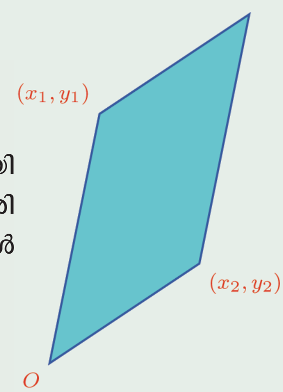


(2) ചിത്രത്തിൽ ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ നാലു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു:

$x_1 + x_3 = x_2 + x_4$ എന്നും $y_1 + y_3 = y_2 + y_4$ എന്നും തെളിയിക്കുക.

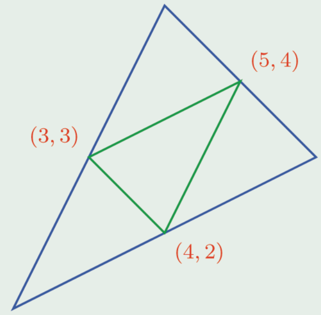


(3) (x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ആധാരബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിക്കുന്ന വരകൾ സമീപവശങ്ങളായ സാമാന്തരികത്തിന്റെ നാലാമത്തെ മൂലയുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്താണ്?



(4) ഏതു സാമാന്തരികത്തിന്റെയും വശങ്ങളുടെയെല്ലാം വർഗങ്ങളുടെ തുക, വികർണങ്ങളുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുകയ്ക്ക് തുല്യമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(5) ചിത്രത്തിലെ വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാണ് അതിനുള്ളിലെ ചെറിയ ത്രികോണം വരച്ചിരിക്കുന്നത്:



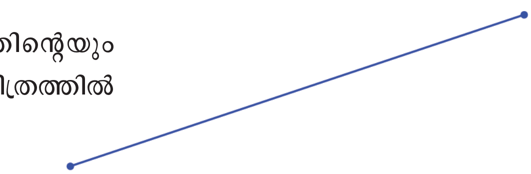
വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളുടെയെല്ലാം സൂചകസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുക.

മധ്യബിന്ദു

ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്കു സമാന്തരമാണെങ്കിൽ, അവയുടെ ഒരു ജോടി എതിർമൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകളിൽനിന്ന് മറ്റേ ജോടി എതിർമൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്ന് നേരത്തെ കണ്ടല്ലോ (**സൂചകസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠം ഓർക്കുക). ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ മൂന്നു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ അറിയാമെങ്കിൽ, നാലാമത്തെ മൂലയുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്നും ഇപ്പോൾ കണ്ടു.

ചില ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകളിൽനിന്ന്, ഈ ബിന്ദുക്കളുമായി ഏതെങ്കിലും തരത്തിൽ ജ്യാമിതീയമായി ബന്ധപ്പെട്ട മറ്റു ചില ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുന്ന പ്രശ്നങ്ങളാണ് ഇവയെല്ലാം. ഇത്തരത്തിലുള്ള മറ്റൊരു കണക്കുനോക്കാം.

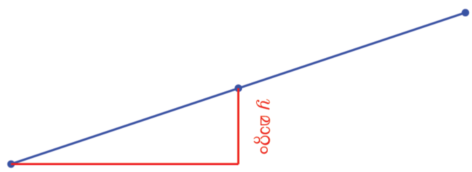
ഒരു വരയുടെ രണ്ടറ്റത്തിന്റെയും സൂചകസംഖ്യകളാണ് ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്:



ഈ വരയുടെ മധ്യബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കണം.

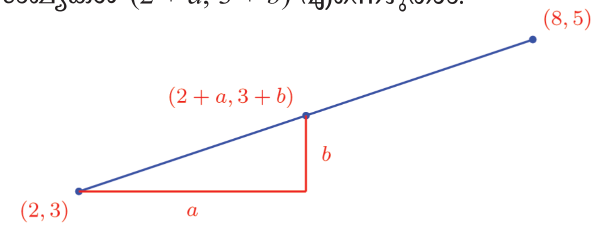
(2, 3) ൽനിന്ന് (8, 5) ലേക്കുള്ള അകലത്തിന്റെ പകുതി അകലത്തിലുള്ള ബിന്ദുവാണ് കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത്.

(2, 3) ൽനിന്ന് ഈ സ്ഥലത്തെത്തുമ്പോൾ, x സൂചകസംഖ്യയിലും y സൂചകസംഖ്യയിലും ഉണ്ടാകുന്ന മാറ്റം കണ്ടുപിടിച്ചാൽ, മധ്യബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകളായി:

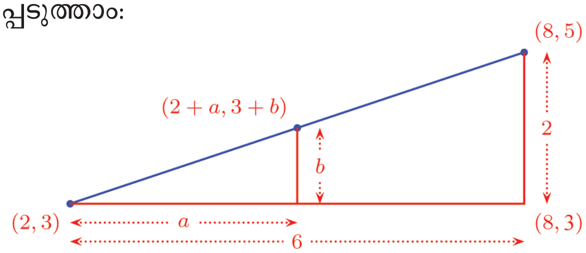


A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ മധ്യബിന്ദു ലഭിക്കാൻ (A + B)/2 എന്ന് Input Bar ൽ നൽകിയാൽ മതി.

ഈ മാറ്റങ്ങളെ a, b എന്നെടുത്താൽ, മധ്യബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(2 + a, 3 + b)$ എന്നെഴുതാം:



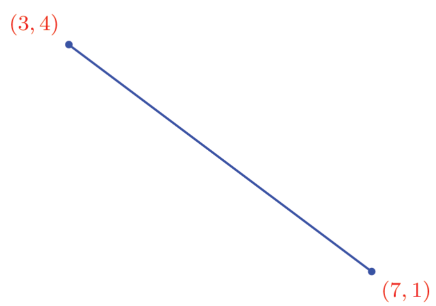
(2, 3) എന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്ന് (8, 5) എന്ന ബിന്ദുവിലേക്കെത്തുമ്പോൾ സൂചകസംഖ്യകളിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റവും അടയാളപ്പെടുത്താം:



ഈ ചിത്രത്തിലെ വലിയ മട്ടത്രികോണത്തിനും, അതിനുള്ളിലെ ചെറിയ മട്ടത്രികോണത്തിനും ഒരേ കോണുകളാണല്ലോ (എങ്ങനെ?) അതിനാൽ അവയുടെ വശങ്ങളുടെ നീളം മാറുന്നതും ഒരേ തോതിലാണ്.

ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കർണം, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കർണത്തിന്റെ പകുതിയാണ്; അപ്പോൾ ലംബവശവും പകുതിതന്നെ. അതായത്, a യും b യും 3 ഉം 1 ഉം ആണ്. മധ്യബിന്ദു (5, 4)

ഇനി വര ഇങ്ങനെയായാലോ?

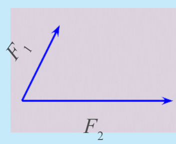


(3, 4) ൽനിന്ന് (7, 1) ലേക്ക് എത്തുമ്പോൾ x സൂചകസംഖ്യ 4 കൂടുകയും, y സൂചകസംഖ്യ 3 കുറയുകയുമാണ് ചെയ്യുന്നത്; അപ്പോൾ മധ്യബിന്ദുവിലെ

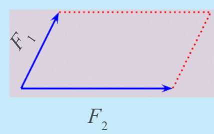
ബലസാമാന്തരികം

ഒരേ വസ്തുവിൽ രണ്ടു ബലങ്ങൾ, രണ്ടു ദിശയിൽ പ്രയോഗിക്കുമ്പോഴുണ്ടാകുന്ന അതേ മാറ്റം, ഒരൊറ്റ നിശ്ചിത ബലം, നിശ്ചിത ദിശയിൽ പ്രയോഗിക്കുന്നതിലൂടെ വരുത്താൻ കഴിയും.

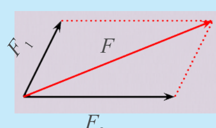
ഈ ബലം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന്, പരീക്ഷണങ്ങളിലൂടെ തിരിച്ചറിഞ്ഞ ഒരു മാർഗമുണ്ട്. ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന്, ആദ്യത്തെ രണ്ടു ബലങ്ങളുടെ അളവുകൾക്ക് ആനുപാതികമായ നീളമുള്ള വരകൾ (ഒരു ന്യൂട്ടൻ ബലത്തിന് ഒരു സെന്റിമീറ്റർ എന്നോ മറ്റോ) അവ പ്രയോഗിക്കുന്ന ദിശയ്ക്കനുസരിച്ച് വരയ്ക്കുക.



ഇനി ഇവ സമീപവശങ്ങളായി സാമാന്തരികം വരയ്ക്കുക.

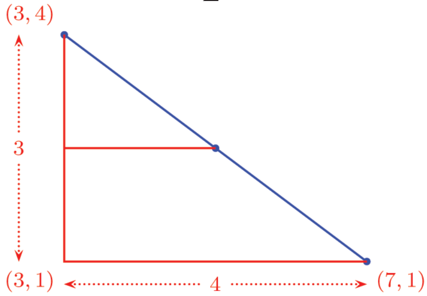


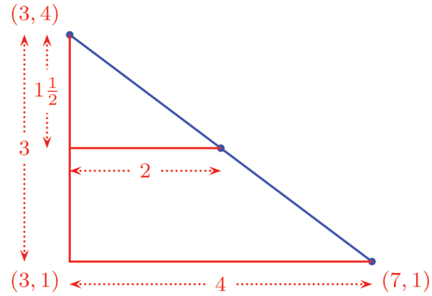
ഈ സാമാന്തരികത്തിന്റെ വികർണത്തിന്റെ ദിശയിലാണ്, ഈ രണ്ടു ബലങ്ങൾക്കും പകരമായ ഒറ്റ ബലം; അതിന്റെ അളവ്, ആദ്യം എടുത്ത തോതനുസരിച്ച്, വികർണത്തിന്റെ നീളവുമായിരിക്കും.



ബലങ്ങളുടെ സാമാന്തരിക തത്വം (Parallelogram Law of Forces) എന്നാണ് ഇതറിയപ്പെടുന്നത്

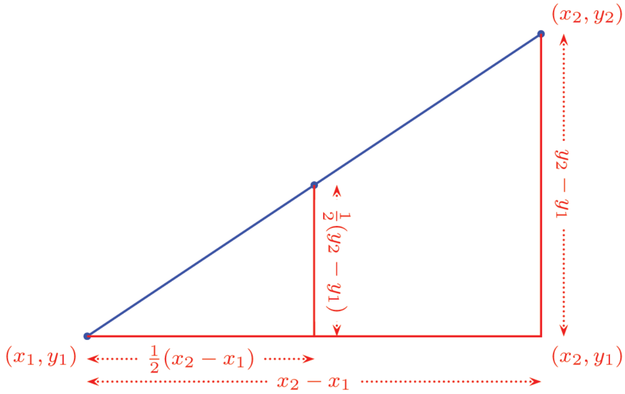
ത്താൻ x സൂചകസംഖ്യ 2 കൂട്ടുകയും, y സൂചകസംഖ്യ $1\frac{1}{2}$ കുറയ്ക്കുകയു മാണ് ചെയ്യേണ്ടത്:





അതായത്, മധ്യബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ $\left(5, 2\frac{1}{2}\right)$

ചിത്രമൊന്നും വരയ്ക്കാതെ മധ്യബിന്ദു കണക്കാക്കാൻ, പൊതുവെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നെടുത്തുനോക്കാം. ഇവയുടെ സ്ഥാനങ്ങൾ പലതരത്തിലാകാം. ആദ്യം ഇങ്ങനെയെടുക്കാം:



മധ്യബിന്ദുവിന്റെ x സൂചകസംഖ്യ

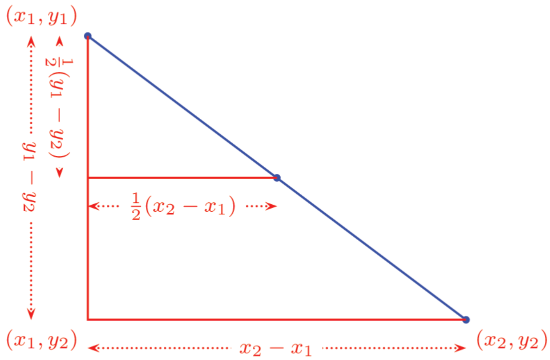
$$x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

എന്നും y സൂചകസംഖ്യ

$$y_1 + \frac{1}{2}(y_2 - y_1) = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

എന്നും കിട്ടിയില്ലേ?

ബിന്ദുക്കൾ ഇങ്ങനെയായാലോ?



മധ്യബിന്ദുവിന്റെ x സൂചകസംഖ്യ

$$x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

y സൂചകസംഖ്യ

$$y_1 - \frac{1}{2}(y_1 - y_2) = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

ബിന്ദുക്കളെല്ലാം സ്ഥാനംമാറ്റി വരച്ചുനോക്കൂ. എന്തുകിട്ടി?

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ മധ്യ ബിന്ദു $\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\right)$

(1) (2, 3), (6, 5) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര വ്യാസമായി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുന്നു. വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്താണ്?

(2) ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ ഒരു ജോടി എതിർമൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (4, 5) ഉം (1, 3) ഉം ആണ്. അതിന്റെ വികർണങ്ങൾ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുക.

(3) ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ ക്രമത്തിൽ (2, 1), (5, 3), (8, 7), (4, 9) എന്നിങ്ങനെയാണ്.

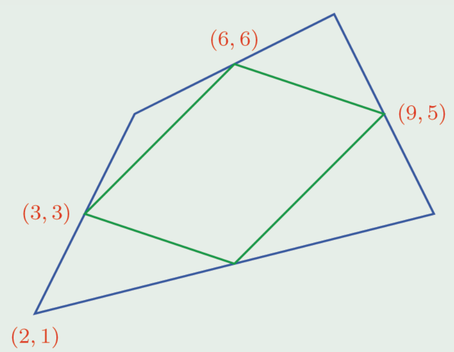
i) എല്ലാ വശങ്ങളുടെയും മധ്യബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുക.

ii) ഈ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചുകിട്ടുന്ന ചതുർഭുജം സാമാന്തരികമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(4) ചിത്രത്തിലെ വലിയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാണ് അതിനുള്ളിലെ ചെറിയ ചതുർഭുജം വരച്ചിരിക്കുന്നത്:

i) ചെറിയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ നാലാം മൂലയുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

ii) വലിയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ മറ്റു മൂന്നു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

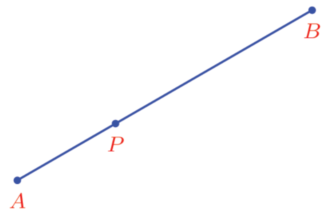


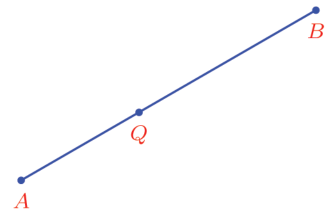
(5) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ (3, 5), (9, 13), (10, 6) എന്നിവയാണ്. ഈ ത്രികോണം സമപാർശ്വമാണെന്നു തെളിയിക്കുക. അതിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

(6) ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം (1, 2) ഉം, അതിലെ ഒരു ബിന്ദു (3, 2) ഉം ആണ്. ഈ ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള വ്യാസത്തിന്റെ മറ്റേ അറ്റം കണ്ടുപിടിക്കുക.

അംശബന്ധം

രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ മധ്യബിന്ദു, വരയെ രണ്ടു സമ ഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു. വരയിലെ മറ്റേതെങ്കിലും ബിന്ദു എടുത്താൽ, അത് വരയെ വ്യത്യസ്ത നീളമുള്ള ഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു. വരയിലെ ഇത്തരം ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം സൂചിപ്പിക്കാൻ അംശബന്ധം ഉപയോഗിക്കാം. ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ.



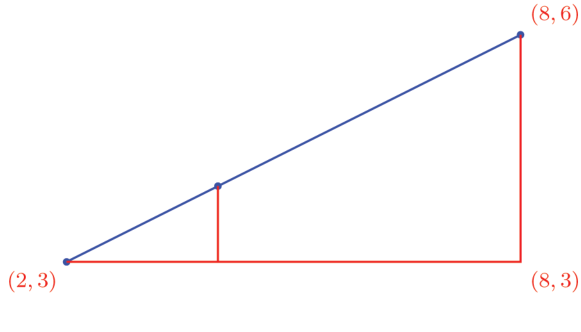


ആദ്യത്തെ ചിത്രത്തിൽ, AP യുടെ നീളം AB യുടെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗവും, PB യുടെ നീളം AB യുടെ (മിച്ചമുള്ള) $\frac{2}{3}$ ഭാഗവുമാണ്. P എന്ന ബിന്ദു A, B ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയെ $1 : 2$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്നു എന്നാണ് പറയുക.

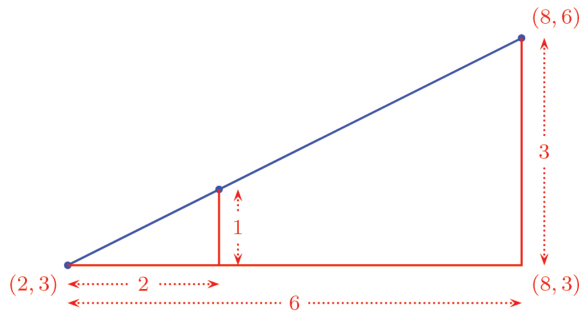
രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ, Q എന്ന ബിന്ദു A, B ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയെ $2 : 3$ എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ് ഭാഗിക്കുന്നത്. അതായത്, AQ യുടെ നീളം AB യുടെ നീളത്തിന്റെ $\frac{2}{5}$ ഭാഗമാണ്. (QB യുടെ നീളം AB യുടെ നീളത്തിന്റെ $\frac{3}{5}$ ഭാഗവും)

നിശ്ചിത അംശബന്ധത്തിൽ ഒരു വരയെ ഭാഗിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചക സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ, മധ്യബിന്ദു കണക്കാക്കിയ മാർഗംതന്നെ (അൽപം വ്യത്യാസം വരുത്തി) ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി, $(2, 3)$, $(8, 6)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയെ $1 : 2$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാം. മധ്യബിന്ദുവിന്റെ കാര്യത്തിലെന്നപോലെ മട്ടത്രികോണങ്ങൾ വരച്ച് തുടങ്ങാം.



ഇതിൽ വലിയ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണത്തിന്റെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗമാണ് ചെറിയ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണം. അതിനാൽ ലംബവശങ്ങളും അതുപോലെ തന്നെ. അപ്പോൾ അവയുടെ നീളങ്ങൾ ഇങ്ങനെ അടയാളപ്പെടുത്താം:



ഇതിൽനിന്ന് നമുക്കാവശ്യമായ ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ (4, 4) എന്നു കണക്കാക്കാമല്ലോ.

ഈ സൂചകസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കിയ രീതി എന്താണ്?

(2, 3) ൽനിന്ന് (8, 6) ൽ എത്താൻ x സൂചകസംഖ്യ 6 ഉം y സൂചകസംഖ്യ 3 ഉം കൂട്ടണം; ഈ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗം അകലെയെത്താൻ, ഈ നീളങ്ങളുടെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗം കൂട്ടണം.

ഇതുപോലെ (1, 6), (11, 2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയെ 3 : 5 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ എങ്ങനെ കണക്കാക്കും?

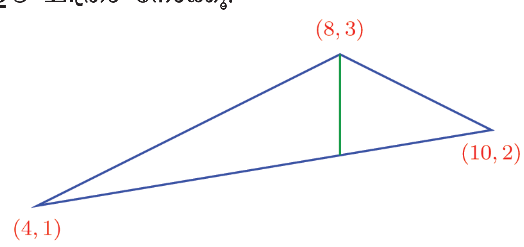
(1, 6) ൽനിന്ന് (11, 2) ൽ എത്താൻ x സൂചകസംഖ്യ 10 കൂട്ടണം; y സൂചകസംഖ്യ 4 കുറയ്ക്കണം. നമുക്കാവശ്യമായ ബിന്ദു, (1, 6) ൽനിന്ന് വരയുടെ $\frac{3}{8}$ ഭാഗം അകലെയാണ്. ചിത്രമൊന്നും വരയ്ക്കാതെ ഈ ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കിക്കൂടെ?

$$x \text{ സൂചകസംഖ്യ } = 1 + 10 \times \frac{3}{8} \quad = \quad 4\frac{3}{4}$$

$$y \text{ സൂചകസംഖ്യ } = 6 - 4 \times \frac{3}{8} \quad = \quad 4\frac{1}{2}$$

A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയെ 3 : 5 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന ബിന്ദു കിട്ടാൻ A + (3/8) (B-A) എന്ന് Input Bar ൽ കൊടുത്താൽ മതി.

ഇനി ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



വലിയ ത്രികോണത്തിനുള്ളിലെ വര, മുകളിലെ കോണിന്റെ സമഭാജിയാണ്. അത് താഴത്തെ വശത്തിൽ മുട്ടുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കണം.

ത്രികോണത്തിലെ ഒരു കോണിന്റെ സമഭാജി എതിർവശത്തെ ഭാഗിക്കുന്നത്, കോണുൾപ്പെടുന്ന വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധത്തിലാണല്ലോ. (ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ **പരപ്പളവ്** എന്ന പാഠത്തിലെ **ത്രികോണഭാഗം**)

മുകളിലെ ത്രികോണത്തിൽ, ഇടതും വലതും വശങ്ങളുടെ നീളം $2\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$ എന്നു കണക്കാക്കാം. അപ്പോൾ നമുക്കു വേണ്ടത്, $(4, 1), (10, 2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയെ $2 : 1$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകളാണ്. മുമ്പു ചെയ്തതുപോലെ,

$$x \text{ സൂചകസംഖ്യ} = 4 + (10 - 4) \times \frac{2}{3} = 8$$

$$y \text{ സൂചകസംഖ്യ} = 1 + (2 - 1) \times \frac{2}{3} = 1\frac{2}{3}$$

എന്നും കണക്കാക്കാം.

(1) A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(3, 2), (8, 7)$ എന്നിവയാണ്. AB എന്ന വരയിൽ

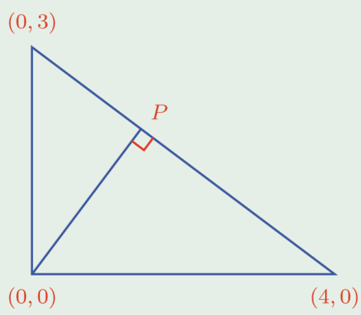
i) $AP : PB = 2 : 3$ ആകുന്ന P എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുക.

ii) $AQ : QB = 3 : 2$ ആകുന്ന Q എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുക.

(2) $(1, 6), (5, 2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയെ മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളാക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുക.

(3) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ $(-1, 5)$, $(3, 7)$, $(1, 1)$ എന്നിവയാണ്. ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ മധ്യമകേന്ദ്രം കണ്ടുപിടിക്കുക.

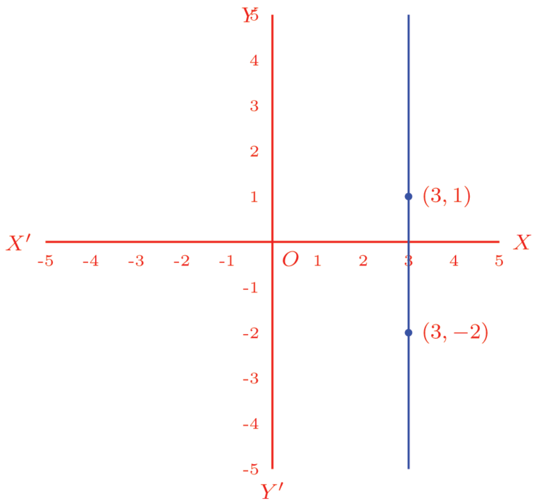
(4) ചിത്രത്തിൽ P എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുക.

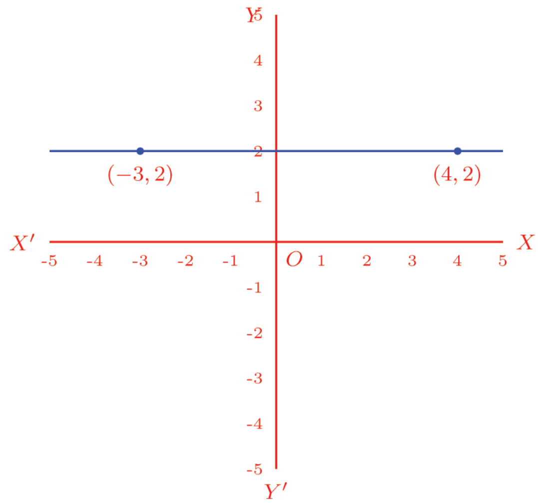


മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ആയ ത്രികോണത്തിന്റെ മധ്യമകേന്ദ്രത്തിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്താണ്?

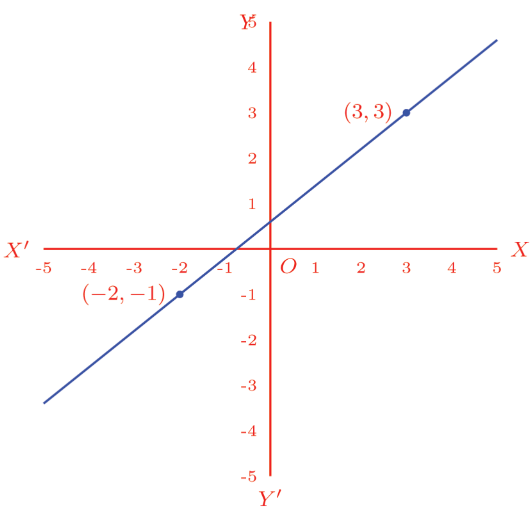
വരക്കണക്ക്

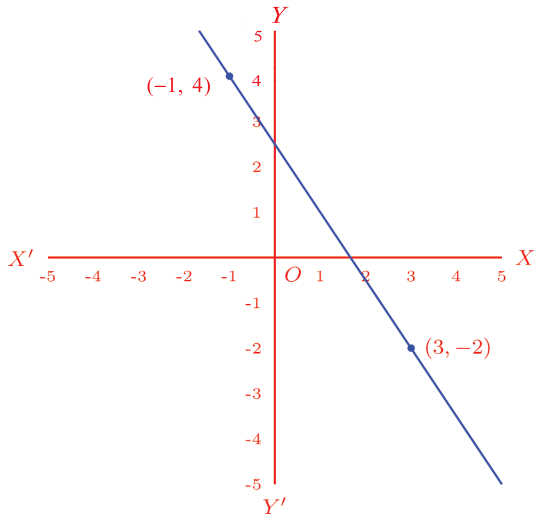
ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചും ഒരു വര (ഒരു വര മാത്രം) വരയ്ക്കാം. അത് ഇരുവശത്തേക്കും എത്ര വേണമെങ്കിലും നീട്ടുകയും ചെയ്യാം. ബിന്ദുക്കളുടെ x സൂചകസംഖ്യ തുല്യമാണെങ്കിൽ, വര y അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായിരിക്കും; y സൂചകസംഖ്യ തുല്യമാണെങ്കിൽ, വര x അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായിരിക്കും:



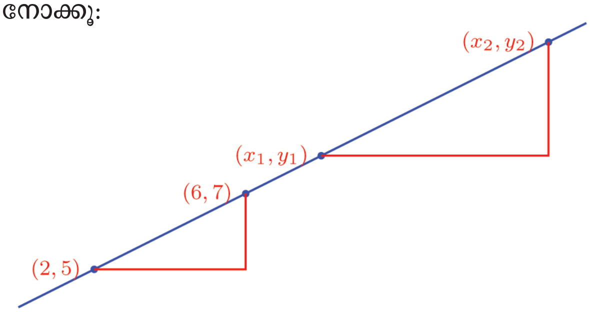


x-സൂചകസംഖ്യകളും y-സൂചകസംഖ്യകളും വ്യത്യസ്തമാണെങ്കിൽ, വര അക്ഷങ്ങളൊന്നിനും സമാന്തരമല്ലാതെ ചരിഞ്ഞിരിക്കും:

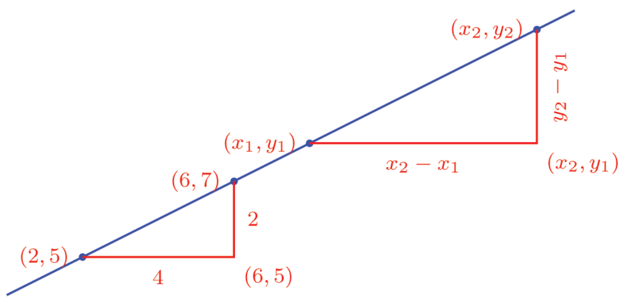




ഇത്തരമൊരു ചരിഞ്ഞ വരയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ, ഓരോ ബിന്ദുവിലും x-സൂചകസംഖ്യയും y-സൂചകസംഖ്യയും മാറും. ഈ മാറ്റത്തിനൊരു കണക്കുണ്ട്. ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



(2, 5), (6, 7) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലെ മറ്റു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളാണ് (x_1, y_1), (x_2, y_2); വരയുടെ രണ്ടു ഭാഗങ്ങൾ കർണങ്ങളും, അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായ ലംബവശങ്ങളുമുള്ള രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളും വരച്ചിട്ടുണ്ട്. ലംബവശങ്ങളുടെ നീളം ഇങ്ങനെ അടയാളപ്പെടുത്താം.



താഴത്തെ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങൾ 4 ഉം 2 ഉം ആണ്. അതായത്, കുത്തനെയുള്ള വശം വിലങ്ങനെയുള്ള വശത്തിന്റെ പകുതിയാണ്. മുകളിലെ ത്രികോണത്തിലും അങ്ങനെതന്നെ ആണ്. (എന്തുകൊണ്ട്?)

അതായത്,

$$y_2 - y_1 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$$

ഇതിൽ (x_1, y_1), (x_2, y_2) വരയിലെ ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുമാവാം.

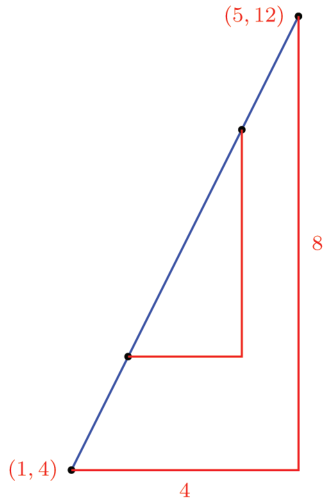
> (2, 5), (6, 7) ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലെ ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെടുത്താലും, അവയുടെ y വ്യത്യാസം, x വ്യത്യാസത്തിന്റെ പകുതിയാണ്.

ഇത് മറ്റൊരുതരത്തിലും പറയാം. ഈ വരയിലൂടെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്നു തുടങ്ങി മറ്റൊരു ബിന്ദുവിലെത്തുമ്പോൾ, x സൂചകസംഖ്യയും, y സൂചകസംഖ്യയും മാറും; ഈ മാറ്റത്തിന്റെ കണക്ക് ഇതാണ്:

> (2, 5), (6, 7) ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ, ഓരോ ഘട്ടത്തിലും y യിലെ മാറ്റം, x ലെ മാറ്റത്തിന്റെ പകുതിയാണ്.

(2, 5), (6, 7) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾക്കു പകരം, മറ്റേതെങ്കിലും ബിന്ദുക്കൾ എടുത്താലോ?

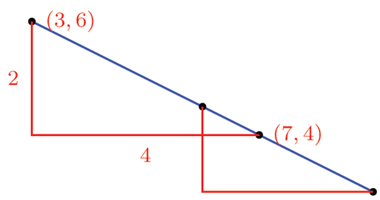
ഉദാഹരണമായി, (1, 4), (5, 12) എന്നെടുത്തു നോക്കാം. ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലൂടെ (1, 4) ൽ നിന്ന് (5, 12) ലേക്ക് എത്തുമ്പോൾ, x സൂചകസംഖ്യ 4 കൂടി; y സൂചകസംഖ്യ 8 ഉം. അതായത്, x ലെ മാറ്റത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ് y ലെ മാറ്റം. ഈ വരയിലെ ഏതു രണ്ടു സ്ഥാനങ്ങളിലും ഇതു തന്നെയാണ് സംഭവിക്കുന്നത്:



(1, 4), (5, 12) ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ, ഓരോ ഘട്ടത്തിലും y ലെ മാറ്റം, x ലെ മാറ്റത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ്.

ഈ രണ്ടു വരകളിലും x കൂടുമ്പോൾ y ഉം കൂടുന്നു. മറിച്ചും സംഭവിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി, (3, 6), (7, 4) എന്ന രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെടുത്താൽ, x സൂചകസംഖ്യ 4 കൂടുമ്പോൾ y സൂചകസംഖ്യ 2 കുറയുകയാണ് ചെയ്യുന്നത്; അപ്പോൾ



(3, 6), (7, 4) ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ, ഓരോ ഘട്ടത്തിലും y ലെ മാറ്റം, x ലെ മാറ്റത്തിന്റെ പകുതിയുടെ ന്യൂനമാണ്.

ഇതിലെല്ലാം പൊതുവെ കാണുന്നതെന്താണ്?

അക്ഷങ്ങളൊന്നിനും സമാന്തരമല്ലാത്ത ഏതു വരയിലും y സൂചകസംഖ്യയിലെ മാറ്റം, x സൂചകസംഖ്യയിലെ മാറ്റത്തെ നിശ്ചിത സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിക്കുന്നതാണ്.

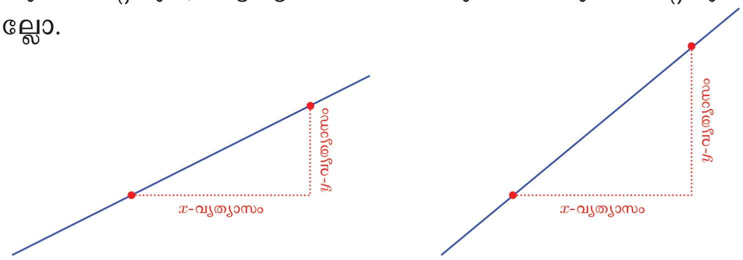
ഇങ്ങനെയുള്ള മാറ്റത്തിന് ഒരു പേരുണ്ടല്ലോ:

അക്ഷങ്ങളൊന്നിനും സമാന്തരമല്ലാത്ത ഏതു വരയിലും y ലെ മാറ്റം, x ലെ മാറ്റത്തിന് ആനുപാതികമാണ്.

x അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായ ഒരു വരയിൽ, y സൂചകസംഖ്യ മാറുന്നില്ല; അതിനാൽ, ഇത്തരമൊരു വരയിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുടെ y വ്യത്യാസം 0 ആണ്. ഇത് x വ്യത്യാസത്തെ 0 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണല്ലോ. അപ്പോൾ ഇവിടെയും y വ്യത്യാസം, x വ്യത്യാസത്തെ ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ചതാണ്. പക്ഷേ x, y മാറ്റം ആനുപാതികമല്ല.

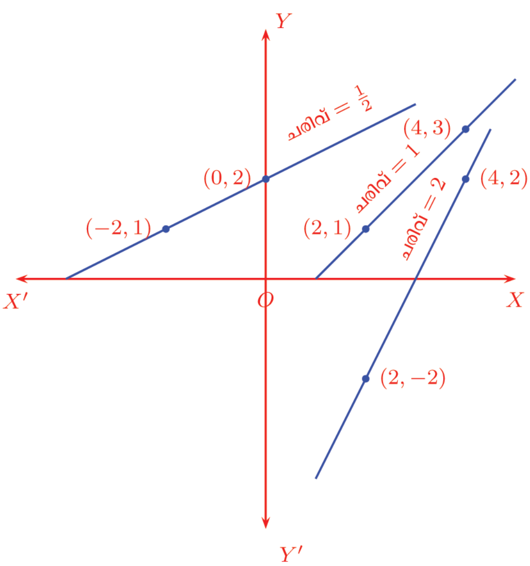
a എന്ന പേരിൽ ഒരു സ്ലൈഡർ നിർമിക്കുക. A എന്ന ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. (x(A) + a, y(A) + 2a) എന്ന് Input Bar ൽ നൽകിയാൽ പുതിയ ഒരു ബിന്ദു ലഭിക്കും. സ്ലൈഡറിന് Animation നൽകി ബിന്ദുവിന്റെ സഞ്ചാരപാത നിരീക്ഷിക്കൂ. ബിന്ദുവിന്റെ Trace on നൽകി നോക്കാം. A യുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ.

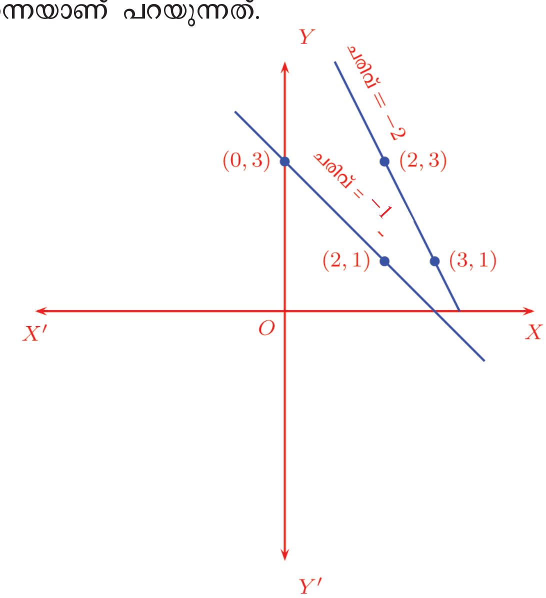
ജ്യാമിതീയമായി നോക്കിയാൽ, x വ്യത്യാസമെന്നത് വിലങ്ങനെയുള്ള മാറ്റവും y വ്യത്യാസമെന്നത് കുത്തനെയുള്ള മാറ്റവുമാണല്ലോ.



അപ്പോൾ y വ്യത്യാസത്തെ x വ്യത്യാസംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത്, വിലങ്ങനെയുള്ള മാറ്റത്തിനനുസരിച്ച്, കുത്തനെയുള്ള മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കാണ്.

മറ്റൊരുതരത്തിൽപ്പറഞ്ഞാൽ, ഒരു വരയിലെ സൂചകസംഖ്യകളുടെ മാറ്റത്തിന്റെ ആനുപാതികസ്ഥിരം, വരയുടെ ചരിവിന്റെ ഒരളവാണ്. ഈ സംഖ്യയെ വരയുടെ **ചരിവ് (slope)** എന്നുതന്നെയാണ് പറയുന്നത്.





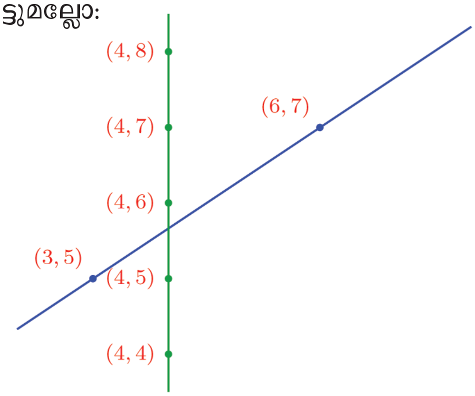
രണ്ടു നിശ്ചിതബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലെ മറ്റു ബിന്ദുക്കൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ ഈ ആശയം ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി, (3, 5), (6, 7) എന്നി ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര നോക്കാം. ഈ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ x മാറ്റം 3 ഉം y മാറ്റം 2 ഉം ആണല്ലോ. അപ്പോൾ ഈ വരയിലെവിടെയും x മാറ്റം 3 ആകുമ്പോൾ y മാറ്റം 2 ആകും.

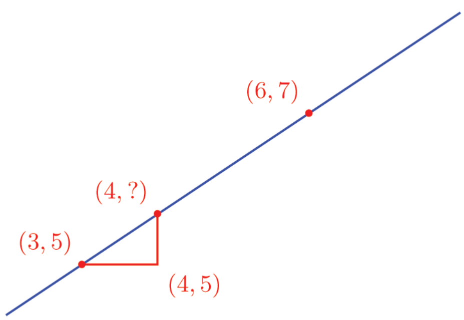
അതായത്, x മാറ്റത്തിന്റെ $\frac{2}{3}$ ഭാഗമാണ് y മാറ്റം. ജ്യാമിതീയമായിപ്പറഞ്ഞാൽ വരയുടെ ചരിവ് $\frac{2}{3}$ ആണ്.

5KYFHR

ഇനി $(3, 5)$ എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ x സൂചകസംഖ്യ 1 കൂട്ടി 4 ആക്കിയാലോ? x സൂചകസംഖ്യ 4 ആയ ഒരു ബിന്ദു ഈ വരയിലുണ്ടോ? $(4, 5)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ y അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര, ആദ്യത്തെ വരയുമായി കൂട്ടിമുട്ടുമല്ലോ:



ഈ ബിന്ദുവിന്റെ y സൂചകസംഖ്യ എന്താണ്?



അതിന്റെ x സൂചകസംഖ്യ 3 നോട് 1 കൂട്ടിയതാണ്.

അപ്പോൾ y സൂചകസംഖ്യ കിട്ടാൻ 5 നോട് $\frac{2}{3}$ കൂട്ടണം. അതായത്, $\left(4,\ 5\frac{2}{3}\right)$ ഈ വരയിലെ ബിന്ദുവാണ്.

ഇതേ രീതിയിൽ, ഏതു സംഖ്യയും x സൂചകസംഖ്യയായ ഒരു ബിന്ദു ഈ വരയിൽ കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി, ഈ വരയിൽ x സൂചകസംഖ്യ 9 ആയ ബിന്ദു ഏതാണ്?

3 നോട് 6 കൂട്ടിയതാണ് 9; അപ്പോൾ y സൂചകസംഖ്യ കിട്ടാൻ 5 നോട് $6 \times \frac{2}{3} = 4$ കൂട്ടണം. അതായത് $(9, 9)$ ഈ വരയിലെ മറ്റൊരു ബിന്ദുവാണ്.

ജിയോജിബ്രയിൽ വരച്ച ഒരു വരയുടെ ചരിവ് കണക്കാക്കാൻ slope ഉപയോഗിച്ച് വരയിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്താൽ മതി.

$(3, 5), (6, 7), (9, 9)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു വരയിലാണെന്നു കണ്ടല്ലോ. ഇവയുടെ x സൂചകസംഖ്യകളായ 3, 6, 9 എന്നീ സംഖ്യകൾ തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ? y സൂചകസംഖ്യകളായ 5, 7, 9 തമ്മിലോ? ഇതുപോലെ ഈ വരയിൽ, സൂചകസംഖ്യകൾ എണ്ണൽസംഖ്യകളായ മറ്റു ചില ബിന്ദുക്കൾ കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

ഭൗതികം, ബീജഗണിതം, ജ്യാമിതി

ഒരു വസ്തു സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം, ആദ്യത്തെ സെക്കന്റിൽ 10 മീറ്റർ, അടുത്ത സെക്കന്റിൽ 15 മീറ്റർ, അതിനടുത്ത സെക്കന്റിൽ 20 മീറ്റർ എന്നിങ്ങനെ ക്രമമായി കൂടുന്നു എന്നു കരുതുക. അപ്പോൾ ഓരോ സെക്കന്റിലും അതിന്റെ വേഗവും മാറുന്നുണ്ടല്ലോ. അതായത്, ആദ്യത്തെ സെക്കന്റിലെ വേഗം 10 മീറ്റർ/സെക്കന്റ്, രണ്ടാമത്തെ സെക്കന്റിലെ വേഗം 15 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്നിങ്ങനെയാണ്.

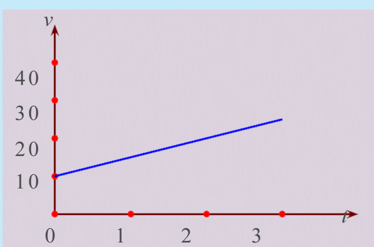
കുറേക്കൂടി ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ, വേഗം ഓരോ സെക്കന്റിലും 5 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിൽ കൂടുന്നു എന്നു പറയാം. ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിന്റെ ഭാഷയിൽ ത്വരണം (acceleration) 10 മീറ്റർ/സെക്കന്റ്/സെക്കന്റ് എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഈ വസ്തുവിന്റെ t സെക്കന്റിലെ വേഗം v കണ്ടുപിടിക്കാൻ

$$v = 10 + 5t$$

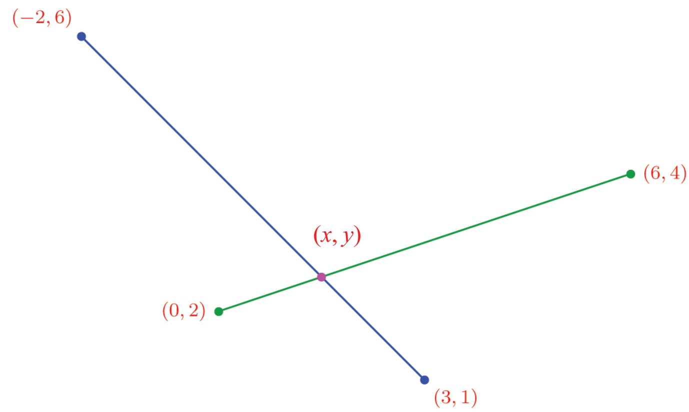
എന്ന ബീജഗണിത വാക്യം ഉപയോഗിക്കാം.

ഇനി ലംബമായ രണ്ടു അക്ഷങ്ങളിൽ t യും v യും അടയാളപ്പെടുത്തി, ഈ വേഗവും, സമയവുമായുള്ള ബന്ധത്തിന്റെ ചിത്രം വരച്ചാലോ?



ഈ വരയുടെ ചരിവ് 5 ആണ്. ഇവിടെ ചരിവ് എന്നത്, t കൂടുന്നതനുസരിച്ച് v കൂടുന്നതിന്റെ നിരക്കാണല്ലോ; അതായത്, ത്വരണം.

രണ്ടു വരകൾ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദു കണ്ടുപിടിക്കാനും ഇതേ ആശയം ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി $(0, 2), (6, 4)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയും, $(3, 1), (-2, 6)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയും മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദു (x, y) എന്നെടുക്കാം.



അപ്പോൾ (x, y) എന്ന ബിന്ദു രണ്ടു വരയിലുമുണ്ട്.

വലത്തോട്ട് ചരിഞ്ഞ വരയിൽ, x സൂചകസംഖ്യ, 0 ത്തിൽ നിന്ന് 6 ആകുമ്പോൾ, y സൂചകസംഖ്യ 2 ൽ നിന്ന് 4 ആകുന്നു. അതായത്, x സൂചകസംഖ്യ 6 കൂടുമ്പോൾ y സൂചകസംഖ്യ 2 കൂടുന്നു. അപ്പോൾ ഈ വരയിലെവിടെയും x മാറ്റത്തിന്റെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗമാണ് y മാറ്റം.

(x, y) എന്ന ബിന്ദു ഈ വരയിലായതിനാൽ, ഇപ്പറഞ്ഞതിൽ നിന്ന്

$$y - 2 = \frac{1}{3}x$$

ഇനി ഇടത്തോട്ടു ചരിഞ്ഞ വരയിലോ?

x സൂചകസംഖ്യ 5 കൂടുമ്പോൾ, y സൂചകസംഖ്യ 5 കുറയുന്നു. അപ്പോൾ ഈ വരയിലെവിടെയും x സൂചകസംഖ്യ 1 കൂടുമ്പോൾ, y സൂചകസംഖ്യ 1 കുറയുന്നു. അതായത്, x മാറ്റത്തിന്റെ ന്യൂനമാണ് y മാറ്റം.

(x, y) എന്ന ബിന്ദു ഈ വരയിലുമായതിനാൽ, ഇതനുസരിച്ച്

$$y - 1 = 3 - x$$

ഇനി രണ്ടു വരയിൽ നിന്നും കിട്ടിയ സമവാക്യങ്ങളെ

$$\begin{aligned} x - 3y &= -6 \\ x + y &= 4 \end{aligned}$$

എന്നു മാറ്റിയെഴുതിയാൽ, ഒമ്പതാംക്ലാസിലെ **സമവാക്യജോടികൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടതുപോലെ x, y എന്നീ സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാം. അപ്പോൾ

$$x = 1\frac{1}{2} \qquad y = 2\frac{1}{2}$$

എന്നു കിട്ടും.

അതായത്, വരകൾ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദു $\left(1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right)$

(1) (1, 3), (2, 5), (3, 7) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു വരയിലാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(2) (–1, 4), (1, 2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലെ മറ്റു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(3) $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ഉം $y_1, y_2, y_3, \ldots$ ഉം സമാന്തരശ്രേണികളാണ്. (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ... എന്ന ശ്രേണിയിലെ ജോടികൾ സൂചകസംഖ്യകളായ ബിന്ദുക്കളെല്ലാം ഒരു വരയിൽത്തന്നെ ആയിരിക്കുമെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(4) (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു വരയിലാണെങ്കിൽ $(3x_1 + 2y_1, 3x_1 - 2y_1)$, $(3x_2 + 2y_2, 3x_2 - 2y_2)$, $(3x_3 + 2y_3, 3x_3 - 2y_3)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളും ഒരേ വരയിലായിരിക്കുമെന്ന് തെളിയിക്കുക. 3, 2 എന്നീ സംഖ്യകൾക്ക് പകരം മറ്റേത് രണ്ട് സംഖ്യകളെടുത്താലും ഇത് ശരിയാകുമോ?

രൂപങ്ങളും സമവാക്യങ്ങളും

(2, 4), (5, 6) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലെ ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകളിൽ x മാറ്റവും y മാറ്റവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ്?

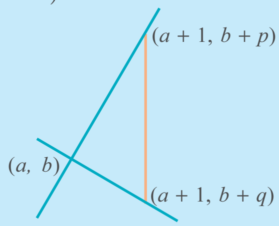
ഈ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ x സൂചകസംഖ്യ 3 കൂടുമ്പോൾ y സൂചകസംഖ്യ 2 കൂടുന്നു. അതായത്, x മാറ്റത്തിന്റെ $\frac{2}{3}$ ഭാഗമാണ് y മാറ്റം.

വരയിലെ ഏതു ജോടി ബിന്ദുക്കളെടുത്താലും ഇങ്ങനെതന്നെ ആയിരിക്കുമല്ലോ.

$(1, 3), (5, 6)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലും $(2, 4), (6, 7)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലും y വ്യത്യാസത്തെ x വ്യത്യാസംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് $\frac{3}{4}$ തന്നെയാണ്. ഓരോ ജോടിയും യോജിപ്പിക്കുന്ന വരകൾ ജിയോജിബ്രയിൽ വരയ്ക്കുക. ഈ വരകൾ തമ്മിലെന്താണ് ബന്ധം?

ചരിവും ലംബവും

സമാന്തരവരകളുടെ ചരിവുകൾ തുല്യമാണെന്നു കാണാൻ വിഷമമില്ല. പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ടു വരകളുടെ ചരിവുകൾ തമ്മിലെന്താണു ബന്ധം?
ചരിവുകൾ p, q ആയ രണ്ടു വരകൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു (a, b) എന്നെടുക്കാം. അപ്പോൾ $(a + 1, b + p)$ എന്ന ബിന്ദു, ആദ്യത്തെ വരയിലാണ്; $(a + 1, b + q)$ എന്ന ബിന്ദു രണ്ടാമത്തെ വരയിലും. (കാരണം?) വരകൾ ലംബമാണെങ്കിൽ,



$(a, b), (a+1, b+p), (a+1, b+q)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളാണ്; രണ്ടാമത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചതാണ് കർണം. ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങളുടെ നീളങ്ങളുടെ വർഗം $p^2 + 1$, $q^2 + 1$ എന്നിവയും, കർണത്തിന്റെ നീളം $|p - q|$ ഉം ആയതിനാൽ

$$(p^2+1)+(q^2+1)=(p-q)^2$$

എന്നു കിട്ടും. ഇതു ലഘൂകരിച്ചാൽ

$$2=-2pq$$

അഥവാ

$$pq=-1$$

അതായത്,
പരസ്പരം ലംബമായ വരകളിൽ ഒരു വരയുടെ ചരിവ്, മറ്റേ വരയുടെ ചരിവിന്റെ വ്യൂൽക്രമത്തിന്റെ ന്യൂനമാണ്.

അപ്പോൾ, വരയിലെ ഏതു ബിന്ദു (x, y) എടുത്താലും, $(2, 4)$ ൽനിന്നുള്ള x മാറ്റവും y മാറ്റവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ഇതാണ്.

$$y - 4 = \frac{2}{3}\ (x - 2)$$

ഈ സമവാക്യത്തെ ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

$$3(y - 4) = 2(x - 2)$$

വീണ്ടും ലഘൂകരിച്ച് ഇങ്ങനെയാക്കാം:

$$2x - 3y + 8 = 0$$

എന്താണിതിന്റെ അർഥം?

ഈ വരയിലെ ഏതു ബിന്ദു എടുത്താലും, അതിന്റെ സൂചക സംഖ്യകൾ ഈ സമവാക്യം അനുസരിക്കും. അതായത്, (p, q) എന്ന സൂചകസംഖ്യകളുള്ള ബിന്ദു ഈ വരയിലാണെങ്കിൽ $2p - 3q + 8 = 0$ ആയിരിക്കും.

മറിച്ച്, ഈ സമവാക്യം അനുസരിക്കുന്ന ഒരു ജോടി സംഖ്യകളെടുത്താൽ, അവ സൂചകസംഖ്യകളായ ബിന്ദു ഈ വരയിൽത്തന്നെ ആയിരിക്കുമോ?

ഉദാഹരണമായി, $x = 11$, $y = 10$ എന്നെടുത്താൽ

$$2x - 3y + 8 = 22 - 30 + 8 = 0$$

എന്നു കാണാം. അപ്പോൾ $(11, 10)$ എന്ന ബിന്ദു ഈ വരയിലാണോ?

നേരത്തെ കണ്ടതുപോലെ $(11, 4)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ y അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര, ഈ വരയുമായി കൂട്ടിമുട്ടുമല്ലോ. ഈ ബിന്ദുവിന്റെ x സൂചകസംഖ്യ 11 തന്നെയാണ്; y സൂചകസംഖ്യ y എന്നെടുക്കാം;

വരയിലെ ഏതു രണ്ട് ബിന്ദുക്കളെടുത്താലും, x മാറ്റത്തിന്റെ $\frac{2}{3}$ ഭാഗമാണ് y മാറ്റം എന്നു കണ്ടല്ലോ.

$(5, 6)$ ഉം $(11, y)$ ഉം വരയിലെ ബിന്ദുക്കളായതിനാൽ, ഇതനുസരിച്ച്

$$y - 6 = \frac{2}{3}\ (11 - 5) = 4$$

എന്നും, തുടർന്ന് $y = 10$ എന്നും കണക്കാക്കാം.

അപ്പോൾ $(11, 10)$ ഈ വരയിലെ ബിന്ദു തന്നെയാണ്.

ഇതുപോലെ $2x - 3y + 8 = 0$ അനുസരിക്കുന്ന ഏതു രണ്ടുസംഖ്യകൾ x, y എടുത്താലും (x, y) എന്ന ബിന്ദു, $(2, 4), (5, 6)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലാണെന്നു കാണാം.

അതായത്, $2p - 3q + 8 = 0$ ആകുന്ന തരത്തിൽ p, q എന്ന ഏതോ ഒരു ജോടി സംഖ്യകൾ കിട്ടിയെന്നു കരുതുക. $(p, 4)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ y അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര, $(2, 4), (5, 6)$ ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുമായി (p, y) എന്ന ബിന്ദുവിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു എന്നെടുത്താൽ, ഉദാഹരണത്തിലേതു പോലെ

$$y - 4 = \frac{2}{3}(p - 2)$$

എന്നു കിട്ടും. ഇത് അൽപം മാറ്റി

$$y = \frac{2}{3}(p - 2) + 4$$

എന്ന രൂപത്തിലാക്കാം. ഇനി $2p - 3q + 8 = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ നിന്ന്

$$q = \frac{2}{3}(p - 2) + 4$$

എന്നുമെഴുതാം. അപ്പോൾ $y = q$ എന്നു കിട്ടും. അതായത്, (p, q) എന്ന ബിന്ദു ഈ വരയിൽത്തന്നെയാണ്. അപ്പോൾ എന്താണ് കണ്ടത്?

> $(2, 4), (5, 6)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലെ ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകളായ സംഖ്യാജോടികളുടെ കൂട്ടവും, $2x - 3y + 8 = 0$ എന്ന സമവാക്യം അനുസരിക്കുന്ന സംഖ്യാജോടികളുടെ കൂട്ടവും ഒന്നുതന്നെയാണ്.

ഇക്കാര്യം ചുരുക്കിപ്പറയുന്നത് ഇങ്ങനെയാണ്:

$(2, 4), (5, 6)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ സമവാക്യം $2x - 3y + 8 = 0$.

ഇതുപോലെ ഏതു വരയിലെയും രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ കണ്ടുപിടിച്ചു കഴിഞ്ഞാൽ, അതിന്റെ സമവാക്യം എഴുതാം.

ഉദാഹരണമായി, $(0, 0), (1, 1)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര നോക്കാം.

ഈ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ x മാറ്റവും y മാറ്റവും തുല്യമാണ്. അതിനാൽ ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലെവിടെയും അങ്ങനെതന്നെ ആയിരിക്കും. അപ്പോൾ ഈ വരയിലെ ഏതെങ്കിലും ബിന്ദു (x, y) എന്നെടുത്താൽ $(0, 0)$ ൽനിന്നുള്ള x മാറ്റവും y മാറ്റവും തുല്യമാണ് അതായത്, $y = x$

ഇതാണ് ഈ വരയുടെ സമവാക്യം. (ഇത് $x - y = 0$ എന്നും എഴുതാം)

ജിയോജിബ്രയിലെ Input Bar ൽ $2x - 3y + 8 = 0$ എന്ന് എഴുതിയാൽ ഈ സമവാക്യം സൂചിപ്പിക്കുന്ന വര കിട്ടും. a, b, c എന്നിങ്ങനെ മൂന്ന് സ്ലൈഡറുകൾ നിർമിച്ച് ax + by + c = 0 എന്ന് Input Bar ൽ എഴുതുക. സ്ലൈഡറുകൾ നീക്കുന്നതിനനുസരിച്ച് വരയ്ക്ക് വരുന്ന മാറ്റം നോക്കുക.

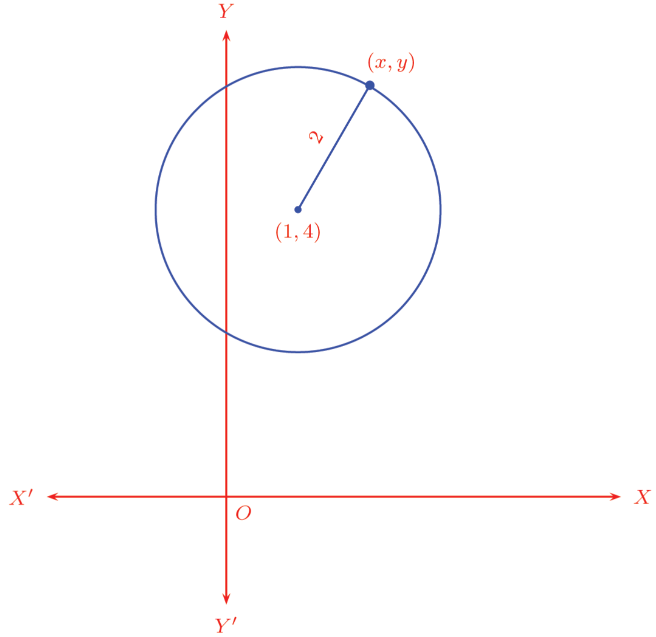
5L8BJE

$(3, 5), (6, 7)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര വരയ്ക്കുക. ഈ വരയുടെ സമവാക്യം Algebra view ൽ കാണാൻ കഴിയും.

ഇതിൽ നിന്ന് ഈ വരയിലെ ഏതു ബിന്ദുവിന്റെയും x സൂചകസംഖ്യയും y സൂചകസംഖ്യയും തുല്യമാണെന്നു കാണാമല്ലോ.

Circle with Centre and Radius ഉപയോഗിച്ച് ജിയോജിബ്രയിൽ വൃത്തം വരയ്ക്കാം. കേന്ദ്രം $(1, 4)$ ഉം ആരം 2 ഉം ആയി ഇത്തരം ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ഇതിന്റെ സമവാക്യം Algebra View ൽ കാണാൻ സാധിക്കും.

വരകൾക്കു മാത്രമല്ല, മറ്റു ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങൾക്കും സമവാക്യമുണ്ടാക്കാം. ഉദാഹരണമായി, കേന്ദ്രം $(1, 4)$ എന്ന ബിന്ദുവും, ആരം 2 ഉം ആയ വൃത്തം നോക്കാം. ഈ വൃത്തത്തിലെ ഏതു ബിന്ദുവിനും കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നുള്ള അകലം 2 ആണ്:



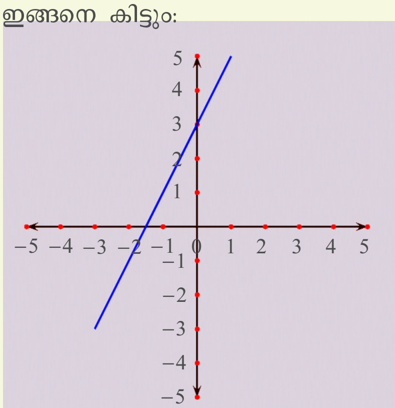
ഈ അകലത്തിന്റെ വർഗം $(x - 1)^2 + (y - 4)^2$ ആണെന്നു കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഇത് വൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിന്റെ വർഗമായതിനാൽ

$$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 4$$

വൃത്തത്തിലെ ഏതു ബിന്ദുവിന്റെയും സൂചകസംഖ്യകൾ ഈ സമവാക്യവും അനുസരിക്കും; മറിച്ച്, ഈ സമവാക്യം അനുസരിക്കുന്ന ഏതു ജോടി സംഖ്യകൾ എടുത്താലും, അവ സൂചകസംഖ്യകളായ ബിന്ദു, വൃത്തത്തിലായിരിക്കുകയും ചെയ്യും.

ഒന്നാംകൃതി ചിത്രം

കമ്പ്യൂട്ടർ ഉപയോഗിച്ച്, $y = 2x + 3$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ ചിത്രം വരച്ചാൽ, ഇങ്ങനെ കിട്ടും:



മറ്റു ചില ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ചിത്രം വരച്ചു നോക്കൂ. എല്ലാം വര തന്നെയാണോ?

ജിയോജിബ്രയിൽ ഇത്തരമൊരു ചിത്രം വരയ്ക്കാൻ Input Bar ൽ y = 2x + 3 എന്നു നൽകിയാൽ മതി.

അപ്പോൾ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം ഇതാണ്. വേണമെങ്കിൽ ഇത് വിസ്തരിച്ച്

$$x^2 + y^2 - 2x - 8y + 13 = 0$$

എന്നും എഴുതാം.

5LH7L2

കേന്ദ്രം ആധാരബിന്ദുവും, ആരം 1 ഉം ആയ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യമെന്താണ്?

ഈ വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യ (x, y) എന്നെടുത്താൽ,

കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നുള്ള അകലത്തിന്റെ വർഗം $x^2 + y^2$; ഇത് ആരത്തിന്റെ വർഗത്തിന് തുല്യമായതിനാൽ

$$x^2 + y^2 = 1$$

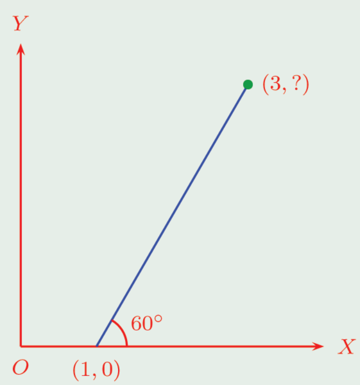
ഇതാണ് ഈ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം.

(1) (1, 2), (2, 4) ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടുപിടിക്കുക. ഇതിൽ x-സൂചകസംഖ്യകൾ 3, 4, 5, ... എന്നിങ്ങനെ തുടർച്ചയായ എണ്ണൽസംഖ്യകളായ ബിന്ദുക്കളുടെ y-സൂചകസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി എന്താണ്?

(2) $(-1, 3), (2, 5)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടുപിടിക്കുക. (x, y) എന്ന ബിന്ദു ഈ വരയിലാണെങ്കിൽ, $(x + 3, y + 2)$ എന്ന ബിന്ദുവും ഈ വരയിൽത്തന്നെയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(3) x ആയി ഏതു സംഖ്യ എടുത്താലും, $(x, 2x + 3)$ എന്ന ബിന്ദു $(-1, 1)$, $(2, 7)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി കടന്നുപോകുന്ന വരയിലെ ബിന്ദുവാണ് എന്ന് തെളിയിക്കുക.

(4) ചിത്രത്തിൽ ചരിഞ്ഞ (നീല) വരയിലെ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ x സൂചകസംഖ്യ 3 ആണ്.



i) അതിന്റെ y സൂചകസംഖ്യ എന്താണ്?

ii) വരയുടെ ചരിവ് എത്രയാണ്?

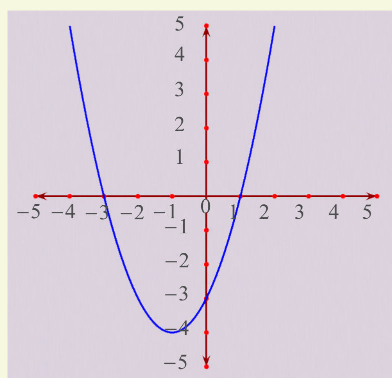
iii) വരയുടെ സമവാക്യം എഴുതുക.

രണ്ടാംകൃതി ചിത്രം

കമ്പ്യൂട്ടർ ഉപയോഗിച്ചു വരച്ച

$$y = x^2 + 2x - 3$$

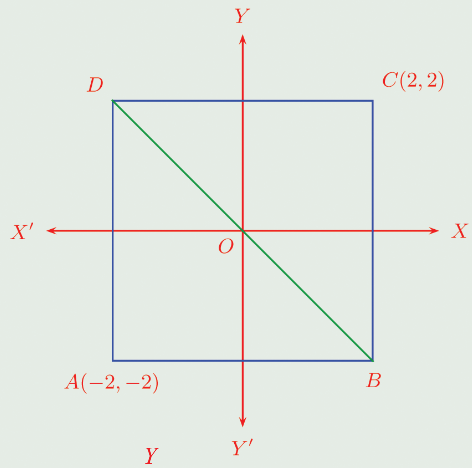
എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ ചിത്രമാണ് ചുവടെകാണിച്ചിരിക്കുന്നത്:



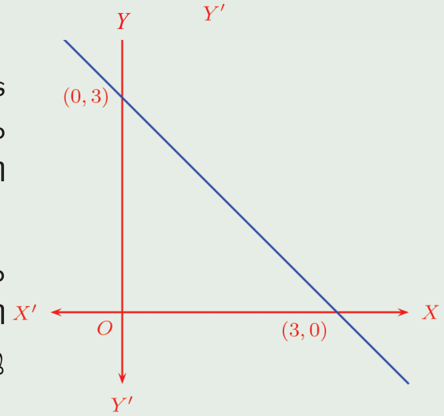
ഇതുപോലെ വ്യത്യസ്ത രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളെടുത്ത്, വരച്ചു നോക്കൂ.

ജിയോജിബ്രയിൽ ഇത്തരമൊരു ചിത്രം വരയ്ക്കാൻ Input Bar ൽ y = x^2 + 2x − 3 എന്നു നൽകിയാൽ മതി.

(5) ചിത്രത്തിൽ $ABCD$ ഒരു സമചതുര മാണ്. BD എന്ന വികർണത്തിലെ ഏത് ബിന്ദുവിന്റെയും x, y സൂചക സംഖ്യകളുടെ തുക പൂജ്യമാണെന്ന് സമർഥിക്കുക.



(6) ചിത്രത്തിൽ x, y അക്ഷങ്ങളെ മുറിച്ചുകട ക്കുന്ന വരയിലെ ഏത് ബിന്ദുവിന്റെയും x, y സൂചകസംഖ്യകളുടെ തുക 3 ആയി രിക്കുമെന്ന് സമർഥിക്കുക.



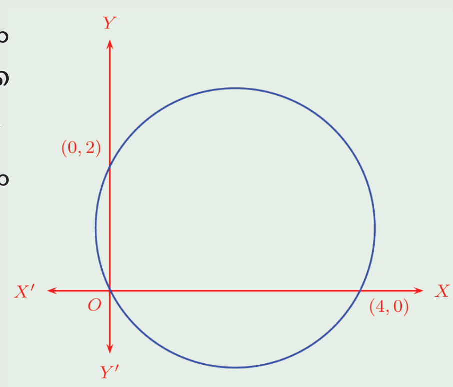
(7) കേന്ദ്രം ആധാരബിന്ദുവും, ആരം 5 ഉം ആയ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം കണ്ടുപി ടിക്കുക. ഈ വൃത്തത്തിലെ എട്ടു ബിന്ദു ക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എഴുതുക.

(8) (0, 1), (2, 3) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പി ക്കുന്ന വര വ്യാസമായ വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദു (x, y) എന്നെടുത്താൽ

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$$

എന്നു തെളിയിക്കുക. ഈ വൃത്തം y അക്ഷത്തെ മുറിച്ച് കടക്കുന്ന ബിന്ദുക്ക ളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുക.

(9) ചിത്രത്തിലെ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം എന്താണ്?



ജിയോജിബ്രയിലെ Input Bar ൽ x, y ഇവയെ ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന ഏതെങ്കിലും സമവാക്യം എഴുതിയാൽ, അത് അനുസരിക്കുന്ന സംഖ്യാജോടികൾ സൂചകസംഖ്യകളായ ബിന്ദുക്കൾ ചേർന്ന ചിത്രം കാണാം. ഈ സമവാക്യങ്ങൾ ഓരോന്നായി അതിൽ കൊടുത്തുനോക്കൂ:

- $2x\hat{}2 + 2y\hat{}2 = 4$
- $2x\hat{}2 + 3y\hat{}2 = 4$
- $2x\hat{}2 - 3y\hat{}2 = 4$
- $2x\hat{}2 + 3y = 4$

ഘടകങ്ങളും പരിഹാരങ്ങളും

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം, അവയുടെ തുകയുടെയും വ്യത്യാസത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണെന്ന് എട്ടാംക്ലാസിൽ കണ്ടല്ലോ.

ബീജഗണിതഭാഷയിൽ പറഞ്ഞാൽ,

x, y എന്ന ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകളെടുത്താലും $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

ഇതിൽ y ആയി പല സംഖ്യകളെടുത്തു നോക്കാം.

x ഏതു സംഖ്യയായാലും

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

$$x^2 - 2 = \left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)$$

$$x^2 - \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$x^2 - 1$, $x^2 - 2$, $x^2 - \frac{1}{4}$ ഇവയെല്ലാം രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളാണ്, $x - 1$, $x + 1$, $x - \sqrt{2}$, $x + \sqrt{2}$, $x - \frac{1}{2}$, $x + \frac{1}{2}$ ഇവയെല്ലാം ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളും.

അപ്പോൾ മുകളിലെഴുതിയ സമവാക്യങ്ങളിലെല്ലാം, ഒരു രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദത്തെ രണ്ടു ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതിയിരിക്കുകയാണ്.

ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യയെ രണ്ടു എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതിയാൽ, ഗുണിക്കുന്ന സംഖ്യകളെ ഘടകങ്ങൾ എന്നാണല്ലോ പറയുന്നത്. ഉദാഹരണമായി $12 = 2 \times 6$ ആയതിനാൽ, 2 ഉം, 6 ഉം 12 ന്റെ ഘടകങ്ങളാണ്. ഇതുപോലെ $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ ആയതിനാൽ, $x - 1$, $x + 1$ ഇവ $x^2 - 1$ ന്റെ ഘടകങ്ങളാണ്.

മറ്റൊരു ഉദാഹരണം നോക്കാം:

$$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$$

എന്ന് ഗുണിച്ചെഴുതാൻ എട്ടാംക്ലാസിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഇത് തിരിച്ചെഴുതിയാൽ

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

അതായത്, ഇപ്പോൾ പറഞ്ഞതനുസരിച്ച് $x + 2$, $x + 3$ എന്നീ ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങൾ, $x^2 + 5x + 6$ എന്ന രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകങ്ങളാണ്.

ഒരു ഉദാഹരണം കൂടി:

$$(x^2 + 1)(x + 2) = x^3 + 2x^2 + x + 2$$

അപ്പോൾ, $x^2 + 1$ എന്ന രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദവും, $x + 2$ എന്ന ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദവും $x^3 + 2x^2 + x + 2$ എന്ന മൂന്നാംകൃതി ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകങ്ങളാണ്.

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ,

$p(x)$ എന്ന ബഹുപദം $q(x)$, $r(x)$ എന്നീ ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമാണെങ്കിൽ $q(x)$, $r(x)$ ഇവയെ $p(x)$ ന്റെ ഘടകങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു.

ഇനി ഈ കണക്ക് നോക്കൂ:

$$(x - 1)(x - 2) = x^2 - 2x - x + 2 = x^2 - 3x + 2$$

അതായത്,

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

എന്ന് ഒന്നാംകൃതി ഘടകങ്ങളായി പിരിച്ചെഴുതാം.

ഇതിൽ മറ്റൊരു കാര്യമുണ്ട്:

$p(x) = x^2 - 3x + 2$ എന്നെഴുതിയാൽ, $p(1)$ എന്താണ്?

$$p(1) = 1 - 3 + 2 = 0$$

കുറെക്കൂടി എളുപ്പത്തിൽ ഇതു കണക്കാക്കാം.

$$p(x) = (x - 1)(x - 2)$$

എന്നും കണ്ടല്ലോ. ഇതിൽ നിന്ന്

$$p(1) = (1 - 1) \times (1 - 2) = 0 \times (-1) = 0$$

ഇതുപോലെ $p(2) = 0$ എന്നും കാണാമല്ലോ.

x ആയി മറ്റേതെങ്കിലും സംഖ്യ എടുത്താൽ $p(x) = 0$ കിട്ടുമോ?

$(x-1)(x-2) = 0$ ആകണമെങ്കിൽ $x-1, x-2$ ഇവയിൽ ഏതെങ്കിലുമൊന്ന് 0 ആകണമല്ലോ.

അതായത്, $p(x) = 0$ ആകാൻ, x ആയി എടുക്കേണ്ട സംഖ്യകളാണ് 1 ഉം 2 ഉം. മറ്റൊരുതരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, $p(x) = 0$ (അഥവാ $x^2 - 3x + 2 = 0$) എന്ന സമവാക്യപ്രശ്നത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങളാണ് 1, 2 എന്നീ സംഖ്യകൾ. വേറൊരു ഉദാഹരണം നോക്കാം;

$$(x-1)(x-2)(x-3) = (x^2 - 3x + 2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

എന്നു ഗുണിച്ചെഴുതാം. മറിച്ചു പറഞ്ഞാൽ $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ എന്ന മൂന്നാംകൃതി ബഹുപദത്തിന്റെ ഒന്നാംകൃതി ഘടകങ്ങളാണ് $x-1, x-2, x-3$ എന്നിവ.

ഇവിടെയും

$$p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$$

എന്നെഴുതിയാൽ, ആദ്യത്തെ കണക്കിലെപ്പോലെ

$$p(1) = 0, p(2) = 0, p(3) = 0$$

എന്നു കാണാം.

അപ്പോൾ ഇതിലും $p(x) = 0$, അതായത്, $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ എന്ന സമവാക്യപ്രശ്നത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങളാണ് 1, 2, 3 എന്നീ സംഖ്യകൾ. ഈ ഉദാഹരണങ്ങളിൽ നിന്നും കിട്ടുന്ന പൊതുതത്വം എന്താണ്?

$x - a$ എന്ന ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദം, $p(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണെങ്കിൽ, $p(a) = 0$ ആണ്. അഥവാ a എന്ന സംഖ്യ, $p(x) = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരമാണ്.

അൽപംകൂടി വിശദമായി പറഞ്ഞാൽ,

$p(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തെ ഒന്നാംകൃതി ഘടകങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി

$$p(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

എന്നു പിരിച്ചെഴുതാൻ കഴിഞ്ഞാൽ, $a_1, a_2, \dots, a_n$ എന്നീ സംഖ്യകൾ $p(x) = 0$ എന്ന സമവാക്യപ്രശ്നത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങളാണ്.

അപ്പോൾ ഒരു ബഹുപദസമവാക്യപ്രശ്നം പരിഹരിക്കാനുള്ള ഒരു മാർഗം, ആ ബഹുപദത്തെ ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി പിരിച്ചെഴുതുക എന്നതാണ്.

ചില രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങൾ പരിഹരിക്കാൻ ഈ തത്വം ഉപയോഗിക്കാം.

സംഖ്യകളുടെ മാത്രമല്ല, ബീജഗണിതവാചകങ്ങളുടെയും ക്രിയകൾ കമ്പ്യൂട്ടറിനെക്കൊണ്ടു ചെയ്യിക്കാം. അതിനുള്ള പ്രോഗ്രാമുകൾ പൊതുവെ Computer Algebra System (CAS) എന്നാണ് അറിയപ്പെടുന്നത്. ജിയോജിബ്രയിലും CAS ഉണ്ട്.

ഉദാഹരണമായി ഈ സമവാക്യപ്രശ്നം നോക്കുക:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$x^2 - 5x + 6$ നെ രണ്ടിൽക്കൂടുതൽ ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതാൻ കഴിയില്ലല്ലോ. (രണ്ടിൽക്കൂടുതൽ ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ കൃത്യങ്കം രണ്ടിൽക്കൂടുതലാവില്ലേ?) അപ്പോൾ,

$$x^2 - 5x + 6 = (x - a)(x - b)$$

എന്നെഴുതിനോക്കാം. ഗുണനഫലം വിസ്തരിച്ചെഴുതിയാൽ,

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - (a + b)x + ab$$

സമവാക്യത്തിലെ ഇരുവശത്തുമുള്ള ബഹുപദങ്ങളിലെ ഗുണകങ്ങൾ തുല്യമാകണം; അതിന്

$$a + b = 5$$

$$ab = 6$$

എന്നു കിട്ടണം.

അതായത്, തുക 5 ഉം, ഗുണനഫലം 6 ഉം ആയ രണ്ടു സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കണം.

അൽപം ആലോചിച്ചാൽ,

$$a = 2 \qquad b = 3$$

എന്നെടുത്താൽ ഇതു ശരിയാകുമെന്നു കാണാം. അപ്പോൾ $x^2 - 5x + 6$ നെ ഇങ്ങനെ പിരിച്ചെഴുതാം;

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

ഇതിൽനിന്ന് $x^2 - 5x + 6 = 0$ എന്ന സമവാക്യപ്രശ്നത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ 2 ഉം, 3 ഉം ആണെന്നു കാണാം.

മറ്റൊരു സമവാക്യപ്രശ്നം നോക്കാം:

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

ആദ്യത്തെ കണക്കിലെപ്പോലെ

$$x^2 + 2x - 15 = (x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$$

എന്നെഴുതിയാൽ, ഇതിൽ

$$a + b = -2$$

$$ab = -15$$

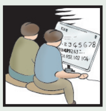
എന്നു കിട്ടും.

3 ഉം, 5 ഉം 15 ന്റെ ഘടകങ്ങളാണ്. ഗുണനഫലം ന്യൂനമായതിനാൽ ഒരെണ്ണം ന്യൂനമായെടുക്കണം. -3 ഉം 5 ഉം എടുത്താൽ തുക ശരിയാകില്ല. 3 ഉം, -5 ഉം ശരിയാകും. $a = 3$, $b = -5$ എന്നെടുത്താൽ,

$$x^2 + 2x - 15 = (x - 3)(x + 5)$$

അപ്പോൾ $x^2 + 2x - 15 = 0$ എന്ന സമവാക്യപ്രശ്നത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ 3ഉം -5ഉം.

?



ചുവടെയുള്ള രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളെ ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക. ഓരോന്നിലും $p(x) = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങളും കണക്കാക്കുക.

i) $p(x) = x^2 - 7x + 12$ ii) $p(x) = x^2 + 7x + 12$

iii) $p(x) = x^2 - 8x + 12$ iv) $p(x) = x^2 + 13x + 12$

v) $p(x) = x^2 + 12x - 13$ vi) $p(x) = x^2 - 12x - 13$

ഘടകസിദ്ധാന്തങ്ങൾ

$x - 1$ എന്ന ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദം, $x^2 - 1$ എന്ന രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണെന്നും, $x - 1$ നു പകരം $x - 2$ എന്നെടുത്താൽ, $x^2 - 4$ ന്റെ ഘടകമാണെന്നും, $x - \frac{1}{2}$ എന്നെടുത്താൽ $x^2 - \frac{1}{4}$ ന്റെ ഘടകമാണെന്നുമെല്ലാം കണ്ടു. പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, a ഏത് സംഖ്യയായാലും, $x - a$ എന്നത് $x^2 - a^2$ ന്റെ ഘടകമാണ്.

ഇതു മറ്റൊരുവിധത്തിൽ പറയാം:

$p(x) = x^2$ എന്ന രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദത്തിൽ x ആയി a എന്ന സംഖ്യ എടുത്താൽ $p(a) = a^2$ ആണല്ലോ. അപ്പോൾ $p(x) - p(a) = x^2 - a^2$. അതായത്, $p(x) = x^2$ എന്ന രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദത്തിൽ, x ആയി ഏതുസംഖ്യ a എടുത്താലും $x - a$ എന്ന ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദം $p(x) - p(a)$ എന്ന രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണ്.

x^2 നുപകരം മറ്റേതെങ്കിലും രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദം എടുത്താൽ ഇതു ശരിയാകുമോ? ഉദാഹരണമായി

$$p(x) = 3x^2 + 2x - 1$$

കൃതിവ്യത്യാസം

x, y എന്ന ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകളെടുത്താലും $x^2 - y^2$ നെ ഗുണനഫലമായി പിരിച്ചെഴുതാം.

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

ഇതുപോലെ $x^3 - y^3$ നെ ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

(ഗുണിച്ചു നോക്കൂ). നാലാംകൃതികളുടെ വ്യത്യാസമായാലോ?

$$x^4 - y^4 = (x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$$

എന്നെഴുതാം.

ഇങ്ങനെ തുടർന്നാൽ, n ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യയായാലും $x^n - y^n$ നെ $x - y$ യുടെ ഗുണിതമായി എഴുതാം.

എന്നും $a = 4$ എന്നും എടുത്തു നോക്കാം. അപ്പോൾ

$$p(a) = p(4) = (3 \times 4^2) + (2 \times 4) - 1$$

ഇത് ലഘൂകരിക്കാതെതന്നെ $p(x) - p(a)$ കണക്കാക്കി നോക്കാം:

$$p(x) - p(a) = (3x^2 + 2x - 1) - \big((3 \times 4^2) + (2 \times 4) - 1\big)$$

ഇതിലെ $x^2, 4^2$ എന്ന ജോടിയും $x, 4$ എന്ന ജോടിയും ചേർത്തെഴുതിയാലോ?

$$p(x) - p(a) = 3(x^2 - 4^2) + 2\,(x - 4)$$

$x^2 - 4^2$ നെ $(x - 4)\,(x + 4)$ എന്നെഴുതാമല്ലോ. അപ്പോൾ

$$p(x) - p(4) = 3(x - 4)\,(x + 4) + 2\,(x - 4)$$

ഈ സമവാക്യത്തിന്റെ വലതുവശത്തെ തുകയിലെ രണ്ടു ബഹുപദത്തിലും $x - 4$ ഉണ്ടല്ലോ. അത് പൊതുഘടകമായെടുത്താലോ?

$$p(x) - p(4) = (x - 4)\,\big(3(x + 4) + 2\big)$$

അൽപംകൂടി ലഘൂകരിച്ച് ഇങ്ങനെ എഴുതാം

$$p(x) - p(4) = (x - 4)\,(3x + 14)$$

ഇതിൽനിന്ന് $p(x) - p(4)$ ന്റെ ഘടകമാണ് $x - 4$ എന്നു കാണാമല്ലോ.

ഒന്നാംകൃതി ഘടകങ്ങൾ

x, y എന്ന എതു രണ്ടു സംഖ്യകളെടുത്താലും

$$x^3 - y^3 = (x - y)\,(x^2 + xy + y^2)$$

ഇതിൽ y ആയി പല സംഖ്യകളെടുത്താൽ $x^3 - 1$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണ് $x - 1$ എന്നും $x^3 - 8$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണ് $x - 2$ എന്നും, $x^3 - \frac{1}{8}$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണ് $x - \frac{1}{2}$ എന്നും, $x^3 + 27$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണ് $x + 3$ എന്നുമെല്ലാം കിട്ടും.

അതായത്, a ഏതു സംഖ്യയായാലും $x^3 - a^3$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണ് $x - a$ എന്നു കാണാം.

മൂന്നിനേക്കാൾ വലിയ കൃതി ആയാലും ഇത് ശരിയാണെന്ന്, **കൃതി വ്യത്യാസം** എന്ന ഭാഗത്തിലെ മറ്റു സമവാക്യങ്ങളിൽനിന്നു കാണാമല്ലോ. പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ

a ഏതു സംഖ്യയായാലും $x^n - a^n$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണ് $x - a$.

ഇതുപയോഗിച്ച്, രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളിൽ ചെയ്തതുപോലെ ഇക്കാര്യം പൊതുവായി ബഹുപദങ്ങൾക്കെല്ലാം ശരിയാണെന്നു കാണാം: $p(x)$ എതു ബഹുപദവും a ഏതു സംഖ്യയും ആയാലും $x - a$ എന്ന ബഹുപദം $p(x) - p(a)$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണ്. ഇതിൽ നിന്ന് മറ്റൊരു തത്വവും കിട്ടും.

$p(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ x ആയി a എന്ന സംഖ്യ എടുക്കുമ്പോൾ, $p(a) = 0$ ആണെങ്കിൽ, $x - a$ എന്ന ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദം $p(x)$ ന്റെ ഘടകമാണ്.

ഒരു ഉദാഹരണം കൂടി നോക്കാം: $p(x) = 2x^2 + x - 4$ എന്നും $a = -2$ എന്നും എടുത്തു നോക്കാം. ആദ്യത്തെ കണക്കിലെപ്പോലെ

$$p(-2) = 2 \times (-2)^2 + (-2) - 4$$

ഇതു മുഴുവൻ ലഘൂകരിക്കാതെ

$$p(-2) = (2 \times 4) - 2 - 4$$

എന്നെഴുതി നിർത്തി, $p(x)$ ൽ നിന്ന് കുറച്ചു നോക്കാം:

$$p(x) - p(-2) = (2x^2 + x - 4) - \big((2 \times 4) - 2 - 4\big)$$

ആദ്യത്തെ കണക്കിലെപ്പോലെ ജോടി ചേർത്തെഴുതിയാൽ

$$p(x) - p(-2) = 2\,(x^2 - 4) + (x + 2)$$

ഇതിലെ $x^2 - 4$ നെ $(x + 2)\,(x - 2)$ എന്നെഴുതാമല്ലോ. അപ്പോൾ

$$p(x) - p(-2) = 2\,(x + 2)\,(x - 2) + (x + 2)$$

വലതുവശത്തെ തുകയിൽ $x + 2$ പൊതുഘടകമായെടുത്താൽ

$$p(x) - p(-2) = (x + 2)\,\big(2(x - 2) + 1\big) = (x + 2)\,(2x - 3)$$

അതായത്, $p(x) - p(-2)$ ന്റെ ഘടകമാണ് $x + 2 = x - (-2)$

$p(x)$ ഏതു രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദമായാലും, a ഏതു സംഖ്യയായാലും ഇതേ രീതിയിൽത്തന്നെ $p(x) - p(a)$ യുടെ ഘടകമാണ് $x - a$ എന്നു കാണാമല്ലോ.

എന്നിട്ടും സംശയം തീരാത്തവർക്കായി, ഈ രീതി പൂർണമായും ബീജഗണിതരൂപത്തിൽ എഴുതി നോക്കാം:

$$p(x) = lx^2 + mx + n$$

എന്ന രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദത്തിൽ x ആയി a എടുത്താൽ

$$\begin{aligned} p(x) - p(a) &= (lx^2 + mx + n) - (la^2 + ma + n) \\ &= l(x^2 - a^2) + m(x - a) \\ &= l(x - a)(x + a) + m(x - a) \\ &= (x - a)\big(l(x + a) + m\big) \\ &= (x - a)\big(lx + (la + m)\big) \end{aligned}$$

അതായത്,

> $p(x)$ എന്ന രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദവും a എന്ന സംഖ്യയും എടുത്താൽ, $x - a$ എന്ന ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദം $p(x) - p(a)$ എന്ന രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണ്.

ഇതിൽ, $p(x) = x^2 - 5x + 6$ എന്നും, $a = 3$ എന്നും എടുത്താലോ? $p(3) = 9 - 15 + 6 = 0$ ആണല്ലോ. അതായത്, $p(x) - p(3) = p(x)$ തന്നെയാണ്. അപ്പോൾ ഈ തത്വമനുസരിച്ച് $x - 3$ എന്നത് $p(x) = x^2 - 5x + 6$ ന്റെ ഘടകമാണെന്നു വരുന്നു.

ഇത് പൊതുവായി പറയാമല്ലോ: $p(x)$ ഏതു രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദമായാലും a ഏതു സംഖ്യ ആയാലും $p(x) - p(a)$ യുടെ ഘടകമാണ് $x - a$. ഇതിലെ $p(a)$ എന്ന സംഖ്യ പൂജ്യമാണെങ്കിൽ, $p(x) - p(a) = p(x)$ എന്നു കിട്ടും. അപ്പോൾ $p(x)$ ന്റെ തന്നെ ഘടകമാണ് $x - a$ എന്നു കിട്ടും. പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ

> **$p(x)$ എന്ന രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദത്തിൽ x ആയി a എന്ന സംഖ്യ എടുക്കുമ്പോൾ $p(a) = 0$ ആണെങ്കിൽ, $x - a$ എന്ന ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദം $p(x)$ ന്റെ ഘടകമാണ്.**

ഉദാഹരണമായി, $p(x) = 3x^2 - 5x - 2$ എന്നും $a = 2$ എന്നുമെടുത്താൽ,

$$p(a) = p(2) = 12 - 10 - 2 = 0$$

അപ്പോൾ $3x^2 - 5x - 2$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണ് $x - 2$

ബഹുപദഹരണം

സംഖ്യകളുടെ ഗുണനക്രിയകളെ തിരിച്ച് ഹരണക്രിയയായും പറയാമല്ലോ. ഉദാഹരണമായി, $2 \times 5 = 10$ എന്നതിനെ $10 \div 2 = 5$ എന്നോ, $10 \div 5 = 2$ എന്നോ എഴുതാം. $\frac{10}{2} = 5$ എന്നും $\frac{10}{5} = 2$ എന്നും ഭിന്നരൂപത്തിലും എഴുതാം.

ഇതുപോലെ

$$(x-1)(x+1) = x^2 - 1$$

എന്ന ബഹുപദഗുണനത്തെ

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

എന്നും

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = x - 1$$

എന്ന ഭിന്നരൂപത്തിൽ എഴുതാം.

ഇവിടെ ഒരു കാര്യം ശ്രദ്ധിക്കണം $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ എന്നത് x ആയി ഏതു സംഖ്യ എടുത്താലും ശരിയാണ്. എന്നാൽ

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

എന്നതിൽ x ആയി 1 എടുക്കാൻ കഴിയില്ലല്ലോ? (എന്തുകൊണ്ട്?)

1) ചുവടെയുള്ള ഓരോ ജോടി ബഹുപദങ്ങളിലും, ആദ്യത്തെ ബഹുപദത്തിൽനിന്ന് ഏതു സംഖ്യ കുറച്ചാലാണ് രണ്ടാമത്തെ ബഹുപദം ഘടകമായ ബഹുപദം കിട്ടുന്നതെന്നു കണക്കാക്കുക. ഇങ്ങനെ കുറച്ചുകിട്ടുന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ രണ്ടാമത്തെ ഘടകം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $x^2 - 3x + 5, x - 4$

(ii) $x^2 - 3x + 5, x + 4$

(iii) $x^2 + 5x - 7, x - 1$

(iv) $x^2 - 4x - 3, x - 1$

2) $x^2 + kx + 6$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ, k ആയി ഏതു സംഖ്യ എടുത്താലാണ് $x - 1$ ഘടകമായ ബഹുപദം കിട്ടുന്നത്? ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ രണ്ടാമത്തെ ഘടകം കണ്ടുപിടിക്കുക.

3) $kx^2 + 2x - 5$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ, k ആയി ഏതു സംഖ്യ എടുത്താലാണ് $x - 1$ ഘടകമായ ബഹുപദം കിട്ടുന്നത്?

ഹരണഫലവും ശിഷ്ടവും

$p(x)$ എന്ന ബഹുപദവും a എന്ന സംഖ്യയും എടുത്താൽ $p(x) - p(a)$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണ് $x - a$ എന്നു കണ്ടല്ലോ (**ഒന്നാംകൃതി ഘടകങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം)

അപ്പോൾ, $p(x) - p(a)$ എന്ന ബഹുപദത്തെ $x - a$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെയും $q(x)$ എന്നൊരു ബഹുപദത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമായി എഴുതാം:

$$p(x) - p(a) = (x - a)\,q(x)$$

ഇതൽപം മാറ്റി

$$p(x) = (x - a)\,q(x) + p(a)$$

എന്നെഴുതാം. അതായത്, $p(x)$ എന്ന ഏതു ബഹുപദവും, a എന്ന ഏതു സംഖ്യയും എടുത്താൽ, $p(x)$ നെ $x - a$ യുടെ ഗുണിതത്തിന്റെയും $p(a)$ എന്ന സംഖ്യയുടെയും തുകയായി എഴുതാം.

$$18 = (7 \times 2) + 4$$

എന്ന് ഹരണഫലവും ശിഷ്ടവുമായി പിരിച്ചെഴുതുന്നതുപോലെയാണ് മേൽപ്പറഞ്ഞ കാര്യവും.

അതിനാൽ $p(x) = (x - a)\,q(x) + p(a)$ എന്നെഴുതിയാലും $p(x)$ നെ $x - a$ കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ, ഹരണഫലം $q(x)$, ശിഷ്ടം $p(a)$ എന്നാണ് പറയുന്നത്.

പരിഹാരങ്ങളും ഘടകങ്ങളും

ചില രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങൾ പരിഹരിക്കാൻ ഘടകക്രിയ ഉപയോഗിക്കാമെന്ന് ഒന്നാംഭാഗത്ത് കണ്ടല്ലോ. മറിച്ച്, രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ഘടകക്രിയയും ചെയ്യാം. ഉദാഹരണമായി,

$$p(x) = x^2 - 30x + 221$$

എന്ന ബഹുപദം നോക്കൂ. ഇതിനെ ഒന്നാംകൃതി ഘടകങ്ങളായി പിരിച്ചെഴുതാൻ, ഒന്നാംഭാഗത്തിൽ ചെയ്തതുപോലെ, തുക 30 ഉം, ഗുണനഫലം 221 ഉം ആകുന്ന രണ്ടു സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കണം.

മറ്റൊരു വഴിയുണ്ട്. $x - a$ എന്ന ബഹുപദം $p(x)$ ന്റെ ഘടകമാണെങ്കിൽ, $p(a) = 0$ ആകണമല്ലോ.

അതായത്, $a^2 - 30a + 221 = 0$ ആകണം. മറ്റൊരു വിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ,

$$x^2 - 30x + 221 = 0$$

എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരമാകണം a. ഈ സമവാക്യം പരിഹരിക്കാൻ അറിയാമല്ലോ:

$$x = \frac{30 \pm \sqrt{30^2 - 884}}{2} = \frac{1}{2}\,(30 \pm 4) = 17 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } 13$$

അതായത് $p(17) = 0$ ഉം $p(13) = 0$ ഉം ആണ്.

ഇതിൽനിന്ന് $x - 17$, $x - 13$ ഇവ $p(x)$ ന്റെ ഘടകങ്ങളാണെന്നു കിട്ടും

$$x^2 - 30x + 221 = (x - 17)(x - 13)$$

എന്ന് കാണുകയും ചെയ്യാം.

മറ്റൊരു ഉദാഹരണം നോക്കാം: $x^2 - 2x - 1$ എന്ന ബഹുപദത്തെ ഒന്നാംകൃതി ഘടകങ്ങളായി പിരിച്ചെഴുതണം. അതിന് ആദ്യത്തെ ഉദാഹരണത്തിലെപ്പോലെ $x^2 - 2x - 1 = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ കണ്ടുപിടിച്ചാൽ മതി. അത് ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം.

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{1}{2}(2 \pm 2\sqrt{2}) = 1 \pm \sqrt{2}$$

അപ്പോൾ $1 + \sqrt{2}$, $1 - \sqrt{2}$ ഇവയാണ് $x^2 - 2x - 1 = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ. അതിനാൽ മേൽപ്പറഞ്ഞ തത്വമനുസരിച്ച് $x - (1 + \sqrt{2})$, $x - (1 - \sqrt{2})$ ഇവ $x^2 - 2x - 1$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകങ്ങളാണ്.

$$x^2 - 2x - 1 = (x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$$

എന്നും കാണാം.

ഒരു ഉദാഹരണം കൂടി: $2x^2 - 7x + 6$ നെ രണ്ടു ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എങ്ങനെ എഴുതാം?

ജിയോജിബ്രയിലെ ആൾജിബ്ര

ജിയോജിബ്രയിൽ ജ്യാമിതീയരൂപങ്ങൾ വരയ്ക്കുക മാത്രമല്ല, ബീജഗണിതക്രിയകളും ചെയ്യാം (Geometry യും Algebra യും ചേർന്നതാണ് GeoGebra).

അതിന് ജിയോജിബ്രയിലെ CAS തുറക്കണം (View → CAS). ഇനി ഇതിൽ ബീജഗണിതക്രിയകൾ ചെയ്യാം. ഉദാഹരണമായി

(x – a)*(x^2+a*x+a^2)

എന്ന് കൊടുത്താൽ $-a^3 + x^3$ എന്നു കിട്ടും.

solve (x^2-x-1=0)

എന്നു കൊടുത്താൽ

$$\left\{ x = \frac{-\sqrt{5}+1}{2},\ x = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right\}$$

എന്നു കിട്ടും

$p(x) = 2x^2 - 7x + 6$ എന്നെടുത്താൽ, അതിന്റെ ഒന്നാംകൃതി ഘടകങ്ങൾ കണക്കാക്കാൻ $p(x) = 0$ എന്ന സമവാക്യം പരിഹരിക്കണം. $2x^2 - 7x + 6 = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{4} = \frac{1}{4}(7 \pm 1) = 2 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } \frac{3}{2}$$

അപ്പോൾ $x - 2$, $x - \frac{3}{2}$ ഇവ $2x^2 - 7x + 6$ ന്റെ ഘടകങ്ങളാണ്.

ഇവ തമ്മിൽ ഗുണിച്ചാൽ $2x^2 - 7x + 6$ കിട്ടുമോ?

$$(x - 2)\left(x - \frac{3}{2}\right) = x^2 - \frac{7}{2}x + 3$$

$x^2 - \frac{7}{2}x + 3$ നെ $2x^2 - 7x + 6$ ആക്കാൻ എന്തു ചെയ്യണം?

അപ്പോൾ

$$2x^2 - 7x + 6 = 2\left(x^2 - \frac{7}{2}x + 3\right) = 2(x - 2)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

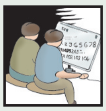
ഇത് വേണമെങ്കിൽ അൽപംകൂടി ഭംഗിയായി

$$2x^2 - 7x + 6 = (x - 2)(2x - 3)$$

എന്നെഴുതാം.

എല്ലാ രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളെയും ഇങ്ങനെ ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി പിരിച്ചെഴുതാൻ കഴിയണമെന്നില്ല. ഉദാഹരണമായി $x^2 + 1$ എന്ന ബഹുപദം നോക്കൂ. $x^2 + 1 = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിനു പരിഹാരമൊന്നുമില്ലല്ലോ (എന്തുകൊണ്ട്?) അതിനാൽ $x^2 + 1$ എന്ന ബഹുപദത്തിനു ഒന്നാംകൃതി ഘടകങ്ങളുമില്ല.

?



1) ചുവടെയുള്ള രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളെ ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക.

(i) $x^2 - 20x + 91$

(ii) $x^2 - 20x + 51$

(iii) $x^2 + 5x - 84$

(iv) $4x^2 - 16x + 15$

(v) $x^2 - x - 1$

2) ചുവടെയുള്ള ബഹുപദങ്ങളെ ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതാൻ കഴിയില്ലെന്നു തെളിയിക്കുക.

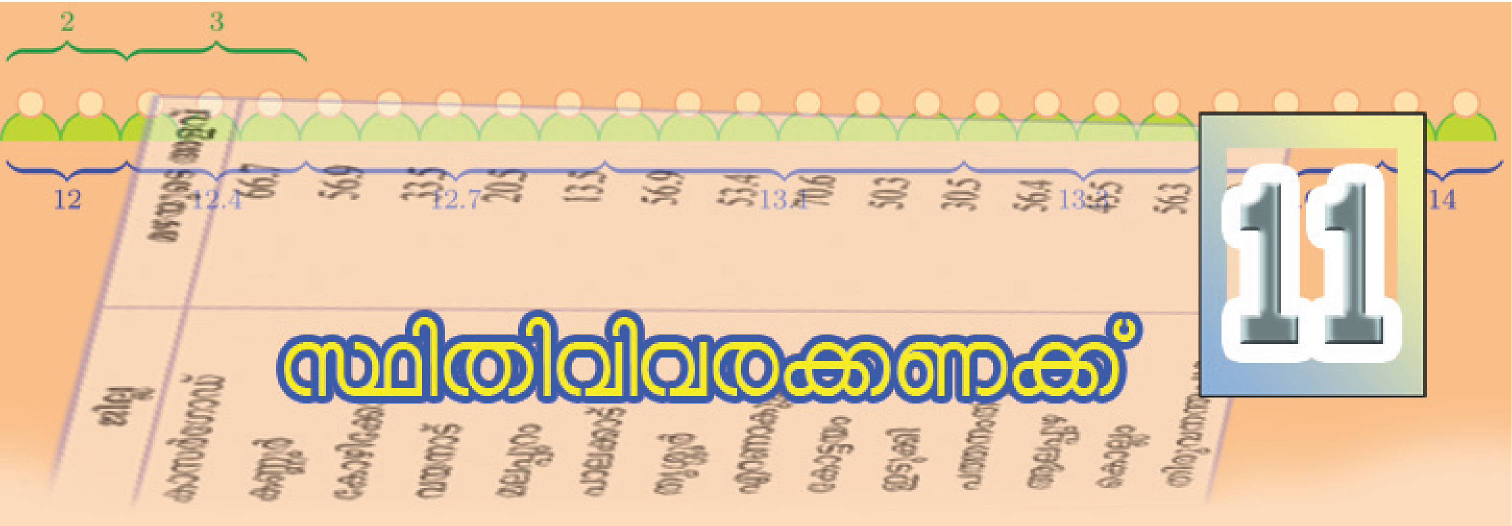
(i) $x^2 + x + 1$

(ii) $x^2 - x + 1$

(iii) $x^2 + 2x + 2$

(iv) $x^2 + 4x + 5$

3) $p(x) = x^2 + 4x + k$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ, k എന്ന സംഖ്യ ഏതു സംഖ്യവരെ എടുത്താലാണ് $p(x)$ നെ രണ്ടു ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതാൻ കഴിയുക?



11 സ്ഥിതിവിവരക്കണക്ക്

ശരിയല്ലാത്ത ശരാശരി

അടുത്തടുത്തു താമസിക്കുന്ന 10 കുടുംബങ്ങളുടെ മാസവരുമാനം ഇങ്ങനെയാണ്.

16500	21700	18600	21050	19500
17000	21000	18000	22000	17500

ഇക്കൂട്ടത്തിന്റെ മാധ്യവരുമാനം എത്ര രൂപയാണ്?

വരുമാനമെല്ലാം കൂട്ടി, 10 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ, മാധ്യം 19285 രൂപയെന്നു കിട്ടും.

ഇനി ഈ പത്തു കുടുംബങ്ങളുടെയും മാസവരുമാനത്തിന്റെ വിശദവിവരങ്ങൾക്കു പകരം, മാധ്യമായ തുക മാത്രം കിട്ടിയാലും ഇവരുടെ മൊത്തത്തിലുള്ള സാമ്പത്തികസ്ഥിതിയെക്കുറിച്ച് പൊതുവായി ചിലതെല്ലാം പറയാം;

- ഇവരുടെയെല്ലാം മാസവരുമാനം 19285 രൂപയോട് ഏറെക്കുറെ അടുത്ത തുകകളാണ്.
- ആരുടെയും മാസവരുമാനം 19285 രൂപയിൽനിന്ന് ഏറെക്കൂടുതലോ കുറവോ അല്ല.
- 19285 രൂപയിൽക്കൂടുതൽ മാസവരുമാനമുള്ളവരുടെ എണ്ണവും, ഈ തുകയേക്കാൾ കുറഞ്ഞ മാസവരുമാനമുള്ളവരുടെ എണ്ണവും ഏറെക്കുറെ തുല്യമാണ്.

ഇവരുടെ അടുത്തുതന്നെ 175000 രൂപ മാസവരുമാനമുള്ള ഒരു കുടുംബം കൂടി താമസമാക്കിയെന്നു കരുതുക. ഇപ്പോൾ ഈ 11 കുടുംബങ്ങളുടെ മാധ്യവരുമാനം എന്തായി?

$$\frac{(19285\times10)+175000}{11}\approx 33441 \text{ രൂപ}$$

ഇനി ഈ വിവരങ്ങളൊന്നും പറയാതെ, ഇപ്പോൾ കിട്ടിയ മാധ്യം മാത്രം പറഞ്ഞാൽ, ഈ 11 കുടുംബങ്ങളുടെയെല്ലാം മാസവരുമാനം ഏതാണ്ട്

30000 രൂപയാണെന്ന തെറ്റായ ധാരണ ഉണ്ടാകില്ലേ? ഈ സംഖ്യ, ഇതിലെ പത്തു കുടുംബങ്ങളുടെയും മാസവരുമാനത്തിന്റെ ഒന്നര മടങ്ങോളമാണ്.

ഒരു കാര്യത്തെക്കുറിച്ചുള്ള കുറേ സംഖ്യകളെ, പൊതുവായ ധാരണ നൽകാൻ പറ്റിയ ഒരു സംഖ്യയായി ചുരുക്കുക എന്നതാണല്ലോ മാധ്യം കണക്കാക്കുന്നതിന്റെ ഉദ്ദേശ്യം. പക്ഷേ കൂട്ടത്തിലെ മറ്റു സംഖ്യകളേക്കാൾ വളരെ വലുതോ, തീരെ ചെറുതോ ആയ സംഖ്യകൾ (എണ്ണത്തിൽ കുറവായിരുന്നാൽപ്പോലും) മാധ്യത്തെ വളരെയധികം സ്വാധീനിക്കും.

നമ്മുടെ ഉദാഹരണത്തിൽ, ആദ്യത്തെ പത്തു സംഖ്യകളേക്കാൾ വളരെ വലിയ ഒരേയൊരു സംഖ്യയാണ്, മാധ്യത്തെ വല്ലാതെ മാറ്റിക്കളഞ്ഞത്. ഇതുപോലെ വളരെ വലുതോ ചെറുതോ ആയ സംഖ്യകൾ മാധ്യത്തെ സംബന്ധിച്ച പൊതു ധാരണ തെറ്റിക്കുന്ന മറ്റു സന്ദർഭങ്ങൾ പറയാമോ?

മറ്റൊരു ശരാശരി

നമ്മുടെ ഉദാഹരണത്തിലെ 11 കുടുംബങ്ങളുടെ മാസവരുമാനത്തെക്കുറിച്ച് ശരിയായ സൂചന നൽകുന്ന ഒരു സംഖ്യ കണക്കാക്കേണ്ടതുണ്ടല്ലോ. അത്തരമൊരു സംഖ്യയെപ്പറ്റി ആലോചിച്ചു നോക്കാം.

വരുമാനങ്ങളെല്ലാം സംഖ്യകളുടെ വലുപ്പക്രമത്തിലെഴുതി, നടുക്കുള്ള സംഖ്യ എടുത്താൽ, 5 കുടുംബങ്ങളുടെ വരുമാനം അതിനേക്കാൾ കുറവും, വേറെ 5 കുടുംബങ്ങളുടെ വരുമാനം അതിൽ കൂടുതലും ആയിരിക്കുമല്ലോ.

ആദ്യം സംഖ്യകൾ ക്രമമായി എഴുതാം.

16500, 17000, 17500, 18000, 18600, 19500, 21000, 21050, 21700, 22000, 175000

ഇതിൽ നടുക്കുള്ള സംഖ്യ 19500. ഇതിനെ മുകളിലെഴുതിയ സംഖ്യകളുടെ **മധ്യമം (median)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

അതായത്, ഈ 11 കുടുംബങ്ങളുടെ മധ്യമ മാസവരുമാനം 19500 രൂപയാണ്.

ഇത് മറ്റൊരു തരത്തിൽപ്പറയാം. ആകെയുള്ള 11 കുടുംബങ്ങളിൽ 5 കുടുംബങ്ങളുടെ മാസവരുമാനം 19500 നേക്കാൾ കുറവും 5 കുടുംബങ്ങളുടെ മാസവരുമാനം 19500 നേക്കാൾ കൂടുതലുമാണ്. അതായത്, മധ്യമവരുമാനത്തെക്കാൾ കുറഞ്ഞ വരുമാനമുള്ള കുടുംബങ്ങളുടെ എണ്ണവും, മധ്യമത്തെക്കാൾ കൂടിയ വരുമാനമുള്ള കുടുംബങ്ങളുടെ എണ്ണവും തുല്യമാണ്.

ഇനി ആദ്യത്തെ 10 കുടുംബങ്ങൾ മാത്രമെടുത്താലോ? ഇവയുടെ മാസവരുമാനം മാത്രം ക്രമമായെഴുതിയാൽ, നടുക്ക് ഒരു സംഖ്യയ്ക്കു പകരം, 18600, 19500 എന്നീ രണ്ടു സംഖ്യകൾ വരും.

ഇവിടെയും മധ്യമമായെടുക്കേണ്ടത്, അതിനേക്കാൾ കുറഞ്ഞവയുടെ എണ്ണവും, അതിനേക്കാൾ കൂടിയവയുടെ എണ്ണവും തുല്യമാകുന്ന തരത്തിലാണ്. 18600 നും 19500 നും ഇടയ്ക്കുള്ള ഏതു സംഖ്യ എടുത്താലും ഇതു ശരിയാകും. സാധാരണയായി ഇവയുടെ തുകയുടെ പകുതിയാണ് മധ്യമമായി

എടുക്കുന്നത്. അതായത്, ആദ്യത്തെ 10 കുടുംബങ്ങളുടെ മധ്യമ മാസവരുമാനം $\frac{1}{2}$ (18600 + 19500) = 19050 രൂപ

മധ്യമമായ 19050 രൂപ എന്നത്, മാധ്യമായ 19285 രൂപ എന്നതുപോലെതന്നെ ആദ്യത്തെ പത്തു കുടുംബങ്ങളുടെ സാമ്പത്തികസ്ഥിതിയെക്കുറിച്ച് പൊതുവായ ധാരണ തരുന്നുണ്ടല്ലോ (മാധ്യവും മധ്യമവും തമ്മിൽ വലിയ വ്യത്യാസമില്ലതാനും).

പതിനൊന്നാമത്തെ കുടുംബത്തിന്റെ വലിയ വരുമാനം മധ്യമത്തിൽ വലിയ മാറ്റമുണ്ടാക്കുന്നില്ല എന്നതാണ് ഇവിടെ പ്രധാനം. മാത്രമല്ല, കുറേ കുടുംബങ്ങളുടെ മധ്യമ വരുമാനം 19050 രൂപ, അതിലൊരു കുടുംബത്തിന്റെ മാസവരുമാനം 21000 രൂപ എന്നുമാത്രം പറഞ്ഞാൽ, ഇവയിലെ പകുതിയിലേറെ കുടുംബങ്ങളേക്കാൾ വരുമാനം ഇപ്പറഞ്ഞ കുടുംബത്തിനുണ്ടെന്നും മനസിലാക്കാം.

(1) ലോങ്ജമ്പ് പരിശീലനത്തിൽ ഒരാൾ ചാടിയ ദൂരങ്ങൾ ഇങ്ങനെയാണ്.

6.10, 6.20, 6.18, 6.20, 6.25, 6.21, 6.15, 6.10

ദൂരമെല്ലാം മീറ്ററിലാണ്. ഇവയുടെ മധ്യമവും മാധ്യവും കണ്ടുപിടിക്കുക. അവ തമ്മിൽ വലിയ വ്യത്യാസമില്ലാത്തത് എന്തുകൊണ്ടാണ്?

(2) കേരളത്തിലെ വിവിധ ജില്ലകളിൽ 2015 സെപ്റ്റംബർ മാസത്തിലെ ഒരാഴ്ച പെയ്ത മഴയുടെ അളവ് രേഖപ്പെടുത്തിയ പട്ടികയാണ് ചുവടെയുള്ളത്.

ജില്ല	മഴയുടെ അളവ് (മി.മീ.)
കാസർഗോഡ്	66.7
കണ്ണൂർ	56.9
കോഴിക്കോട്	33.5
വയനാട്	20.5
മലപ്പുറം	13.5
പാലക്കാട്	56.9
തൃശ്ശൂർ	53.4
എറണാകുളം	70.6
കോട്ടയം	50.3
ഇടുക്കി	30.5
പത്തനംതിട്ട	56.4
ആലപ്പുഴ	45.5
കൊല്ലം	56.3
തിരുവനന്തപുരം	89.0

ആ ആഴ്ചയിൽ കേരളത്തിലെ മഴയുടെ മാധ്യവും മധ്യമവും കണക്കാക്കുക. മധ്യമത്തേക്കാൾ മാധ്യം കുറഞ്ഞത് എന്തുകൊണ്ടാണ്?

(3) സമാന്തരശ്രേണിയിലായ കുറേ സംഖ്യകളുടെ മധ്യമവും മാധ്യവും തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ആവൃത്തിയും മധ്യമവും

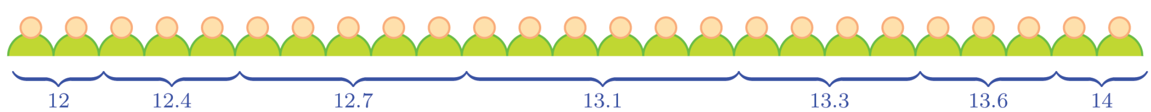
രക്തത്തിലെ ഹീമോഗ്ലോബിന്റെ അളവ്, സാധാരണയായി ഒരു ഡെസിലിറ്ററിൽ (അതായത് 100 മില്ലിലിറ്റർ) എത്ര ഗ്രാം എന്ന തോതിലാണ് പറയുന്നത്. 25 കുട്ടികളുടെ രക്തപരിശോധന നടത്തി, ഹീമോഗ്ലോബിന്റെ അളവനുസരിച്ച് തരംതിരിച്ച പട്ടികയാണിത്.

ഹീമോഗ്ലോബിന്റെ അളവ് (ഗ്രാം/ഡെ.ലി.)	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
12.0	2
12.4	3
12.7	5
13.1	6
13.3	4
13.6	3
14.0	2

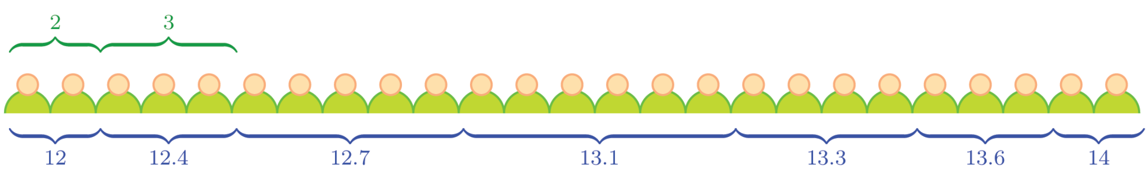
ഇതിൽനിന്നും ഹീമോഗ്ലോബിൻ അളവിന്റെ മാധ്യം കണ്ടുപിടിക്കാം. മധ്യമം എങ്ങനെ കണക്കാക്കും?

നടുക്കു വരുന്നതാണ് മധ്യമം; അതായത്, ഈ പട്ടികയിലെ 25 കുട്ടികളിൽ, 12 പേരുടെ ഹീമോഗ്ലോബിൻ അളവ് മധ്യമത്തെക്കാൾ കുറവായിരിക്കണം; 12 കുട്ടികളുടേത് കൂടുതലും.

ഇതു കണക്കാക്കാൻ, അളവുകളുടെ ക്രമത്തിൽ കുട്ടികളെ നിരത്തി നിർത്തി, പതിമൂന്നാമത്തെ കുട്ടിയുടെ അളവ് എടുത്താൽ മതി. ഇങ്ങനെ നിർത്തുന്നതായി സങ്കൽപ്പിച്ചുനോക്കൂ.

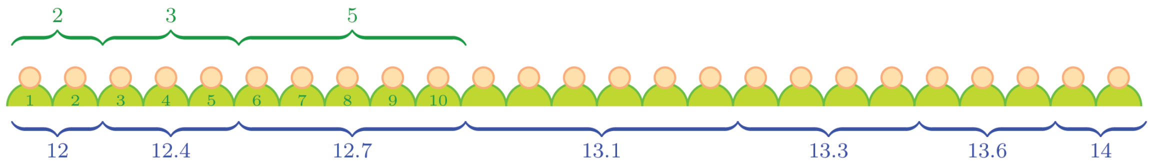


ആദ്യത്തെ 2 കുട്ടികൾക്ക് ഹീമോഗ്ലോബിൻ 12, അടുത്ത 3 കുട്ടികൾക്ക് 12.4 എന്നിങ്ങനെയാണ് വരി നീളുന്നത്.



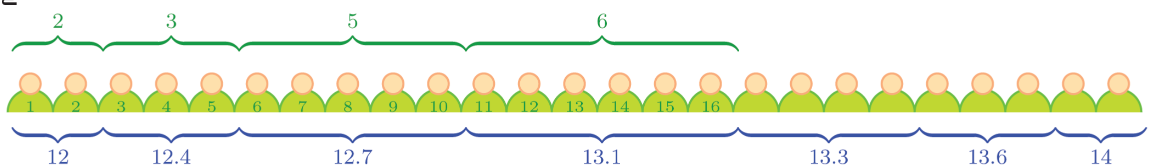
നമുക്കു വേണ്ടത് 13-ാം കുട്ടിയുടെ അളവാണല്ലോ; പട്ടികയിലെ എണ്ണം കൂട്ടിക്കൂട്ടി ഹീമോഗ്ലോബിൻ ശ്രേണിയിൽ ഇയാളുടെ സ്ഥാനം കണ്ടുപിടിക്കാം. ആദ്യത്തെ രണ്ടു കൂട്ടത്തിലെ 2 + 3 = 5 കുട്ടികളെ എടുക്കുമ്പോൾ, അളവ് 12.4 വരെയായി, അതായത്, 5-ാം കുട്ടിയുടെ അളവ് 12.4.

വീണ്ടും അടുത്ത കൂട്ടത്തിലെ 5 കുട്ടികളെയും കൂട്ടിയാൽ 5 + 5 = 10 കുട്ടികളായി, അളവ് 12.7 ൽ എത്തും.

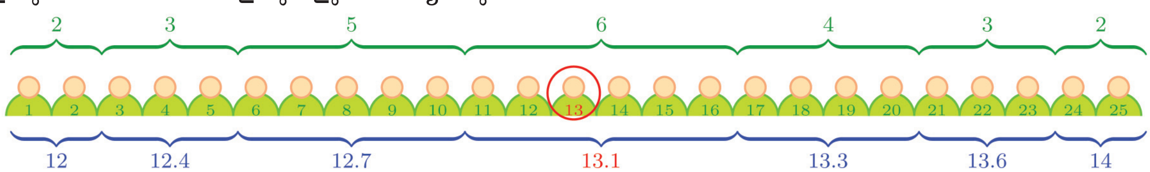


അതായത് 10-ാം കുട്ടിയുടെ അളവ് 12.7

ഇനി അടുത്ത കൂട്ടത്തിലെ 6 കുട്ടികളെക്കൂടി കൂട്ടിയാൽ 10 + 6 = 16 കുട്ടികളായി.



നമുക്കു വേണ്ടത് 13-ാം കുട്ടിയുടെ അളവാണ്. വരിയിലെ 11 മുതൽ 16 വരെയുള്ള സ്ഥാനങ്ങളിലെ കുട്ടികളുടെ ഹീമോഗ്ലോബിൻ അളവ് 13.1 ആണല്ലോ, അപ്പോൾ 13-ാം കുട്ടിയുടെ ഹീമോഗ്ലോബിൻ അളവും 13.1 തന്നെ. ഇതുതന്നെയാണ് അളവുകളുടെ മധ്യമവും.



ചിത്രത്തിനു പകരം ഇതൊരു പട്ടികയാക്കാം.

ഹീമോഗ്ലോബിന്റെ അളവ് (ഗ്രാം/ഡെ.ലി.)	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
12.0 വരെ	2
12.4 വരെ	5
12.7 വരെ	10
13.1 വരെ	16
13.3 വരെ	20
13.6 വരെ	23
14.0 വരെ	25

പട്ടികയിൽ നിന്നും 11 മുതൽ 16 വരെയുള്ള സ്ഥാനങ്ങളിലെ കുട്ടികളുടെ

ഹീമോഗ്ലോബിൻ അളവ് 13.1 ആണെന്നു കാണാം. മൊത്തം കുട്ടികളുടെ നടുക്കുള്ള 13-ാം സ്ഥാനക്കാരനും ഇക്കൂട്ടത്തിലായതിനാൽ, മധ്യമം 13.1 എന്നു കണക്കാക്കാം.

(1) ചുവടെയുള്ള പട്ടികയിൽ, ഒരു പ്രദേശത്തെ 35 കുടുംബങ്ങളെ മാസ വരുമാനത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ തരംതിരിച്ചിരിക്കുന്നു:

മാസവരുമാനം (രൂപ)	കുടുംബങ്ങളുടെ എണ്ണം
4000	3
5000	7
6000	8
7000	5
8000	5
9000	4
10000	3

മധ്യമവരുമാനം കണക്കാക്കുക.

(2) ഒരു തൊഴിൽശാലയിൽ പലതരം ജോലിചെയ്യുന്നവരുടെ എണ്ണം ദിവസക്കൂലിയനുസരിച്ച് എഴുതിയ പട്ടികയാണിത്.

ദിവസക്കൂലി (രൂപ)	ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം
400	2
500	4
600	5
700	7
800	5
900	4
1000	3

ദിവസക്കൂലിയുടെ മധ്യമം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(3) ഒരു ആശുപത്രിയിൽ, ഒരാഴ്ച പിറന്ന കുട്ടികളെ ഭാരമനുസരിച്ച് എണ്ണം തിരിച്ച പട്ടികയാണ് ചുവടെയുള്ളത്.

ശിശുക്കളുടെ ഭാരം (കി.ഗ്രാം)	ശിശുക്കളുടെ എണ്ണം
2.500	4
2.600	6
2.750	8
2.800	10
3.000	12
3.150	10
3.250	8
3.300	7
3.500	5

ഭാരത്തിന്റെ മധ്യമം കണക്കാക്കുക.

വിഭാഗങ്ങളും മധ്യമവും

ഒരു തൊഴിൽശാലയിലെ ജോലിക്കാരെ ദിവസക്കൂലിയുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ തരംതിരിച്ച പട്ടികയാണ് ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.

ദിവസക്കൂലി (രൂപ)	ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം
400-500	6
500-600	7
600-700	10
700-800	9
800-900	5
900-1000	4
ആകെ	**41**

ഈ തൊഴിൽശാലയിലെ മധ്യമ ദിവസക്കൂലി എങ്ങനെ കണക്കാക്കും?

ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ കൂലി കിട്ടുന്നവർ മുതൽ, ഏറ്റവും കൂടുതൽ കൂലി കിട്ടുന്നവർ വരെയുള്ള ജോലിക്കാരെ ക്രമീകരിച്ചാൽ, നടുക്കു വരുന്ന ആളുടെ കൂലിയാണ് കണക്കാക്കേണ്ടത്. ആകെ 41 ജോലിക്കാരാണുള്ളത്; അപ്പോൾ നടുക്കു വരുന്നത്, ഈ ക്രമത്തിൽ 21-ാം ആൾ.

പട്ടികയിൽ ദിവസക്കൂലിയെ പലതായി ഭാഗിച്ചതിൽ ഏതു വിഭാഗത്തിലാണ് 21-ാം ആൾ എന്നാദ്യം കണ്ടുപിടിക്കാം. നേരത്തെ ചെയ്ത കണക്കിലെ

പ്പോലെ, ഓരോ വിഭാഗത്തിലെയും ജോലിക്കാരെ ചേർക്കുമ്പോൾ ആകെ എത്ര പേരാകുമെന്നു നോക്കാം:

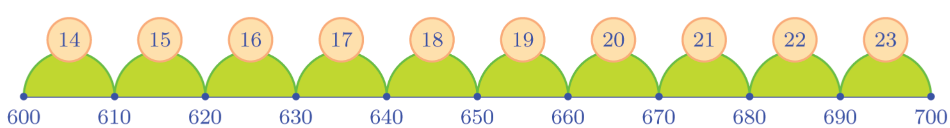
ദിവസക്കൂലി (രൂപ)	ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം
500 നേക്കാൾ കുറവ്	6
600 നേക്കാൾ കുറവ്	13
700 നേക്കാൾ കുറവ്	23
800 നേക്കാൾ കുറവ്	32
900 നേക്കാൾ കുറവ്	37
1000 നേക്കാൾ കുറവ്	41

പട്ടികയനുസരിച്ച്, 600 രൂപയിൽ കുറവ് കൂലി കിട്ടുന്നവരെ ഒന്നിച്ചെടുക്കുമ്പോൾ 13-ാം ആൾ വരെയായി; 700 രൂപയിൽ കുറവ് കൂലി കിട്ടുന്നവരെക്കൂടി ചേർത്തപ്പോൾ 23-ാം ആൾ വരെയായി. ഈ രണ്ടു ജോലിക്കാർക്ക് ഇടയിലാണല്ലോ നമുക്കുവേണ്ട 21-ാം ആൾ. അപ്പോൾ, അയാളുടെ കൂലി 600 രൂപയ്ക്കും 700 രൂപയ്ക്കും ഇടയിലാണെന്നു കിട്ടി.

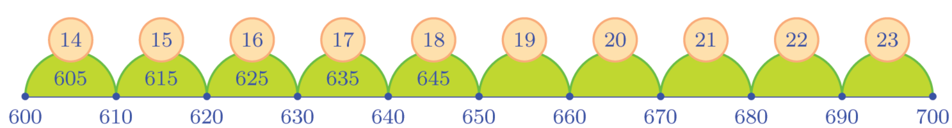
കൂലി കുറേക്കൂടി കൃത്യമായി കണക്കാക്കാൻ എന്തു ചെയ്യും?

14-ാം ആൾ മുതൽ 23-ാം ആൾ വരെയുള്ള 10 ജോലിക്കാരുടെ ദിവസക്കൂലി 600 രൂപയ്ക്കും 700 രൂപയ്ക്കും ഇടയിലാണ് എന്നല്ലാതെ ഇവരിൽ ഓരോരുത്തരുടെയും ദിവസക്കൂലി എത്രയാണെന്നു അറിയില്ലല്ലോ.

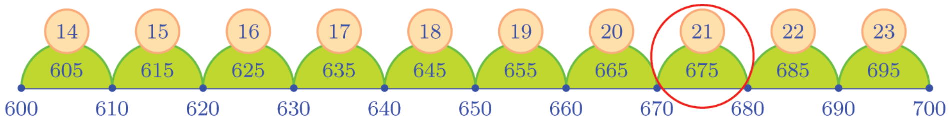
അപ്പോൾ ചില സങ്കൽപ്പങ്ങൾ വേണ്ടിവരും (വിഭാഗപ്പട്ടികയിൽനിന്ന് മാധ്യം കണക്കാക്കാനും ചില സങ്കൽപ്പങ്ങൾ വേണ്ടിവന്നല്ലോ). 600 മുതൽ 700 വരെയുള്ള 100 രൂപയെ 10 സമഭാഗങ്ങളാക്കി, ഓരോ ഭാഗത്തിലും ഒരാൾ എന്നെടുക്കാം:



ഇതിലോരോ ഉപവിഭാഗത്തിലെയും ആളുടെ കൂലി ഈ ഉപവിഭാഗത്തിന്റെ കൃത്യം നടുവിലാണെന്നും സങ്കൽപ്പിക്കാം:



ഈ സങ്കൽപ്പങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ 21-ാം ആളുടെ കൂലി കണക്കാക്കാമല്ലോ:



അതായത്, ദിവസക്കൂലിയുടെ മധ്യമം 675 രൂപ.

ചിത്രമൊന്നും വരയ്ക്കാതെതന്നെ ഇതു കണക്കാക്കാം. ദിവസക്കൂലിയുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ജോലിക്കാരെ ക്രമീകരിക്കുന്നതിനെക്കുറിച്ച് നമ്മുടെ സങ്കൽപ്പങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചുള്ള മധ്യമ കൂലി കണക്കാക്കിയത് എങ്ങനെയാണ്?

- 14-ാം ആളുടെ കൂലി 605 രൂപ
- തുടർന്ന് 23-ാം ആൾവരെയുള്ള ഓരോരുത്തരുടെയും കൂലി 10 രൂപ വീതം കൂടുന്നു
- 14-ാം ആൾ മുതൽ, നമുക്കുവേണ്ട 21-ാം ആൾ വരെ എത്താൻ 7 പേരെക്കൂടി കൂട്ടണം

അപ്പോൾ ഇതൊരു സംഖ്യാപ്രശ്നമായില്ലേ?

605 ൽ തുടങ്ങി, 10 വീതം 7 തവണ കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യ എന്താണ്?

ഇതിന്റെ ഉത്തരം

$$605 + (7 \times 10) = 675$$

എന്ന് കണക്കാക്കാമല്ലോ.

ഇത്തരം ധാരാളം കണക്കുകൾ **സമാന്തരശ്രേണികൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ.

പടമൊന്നും വരയ്ക്കാതെ ഇതുപോലൊരു കണക്കു ചെയ്തു നോക്കാം. ഒരു സ്ഥാപനത്തിൽ പണിയെടുക്കുന്നവരുടെ എണ്ണം, പ്രായമനുസരിച്ച് പട്ടികപ്പെടുത്തിയതാണ് ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.

പ്രായം	**തൊഴിലാളികളുടെ എണ്ണം**
25 – 30	4
30 – 35	7
35 – 40	8
40 – 45	10
45 – 50	9
50 – 55	8
ആകെ	46

മധ്യമപ്രായം കണക്കാക്കണം. ഇതിൽ ആളുകളുടെ എണ്ണം 46 എന്ന ഇരട്ട സംഖ്യ ആയതിനാൽ, ആളുകളെ പ്രായമനുസരിച്ച് ക്രമപ്പെടുത്തി, 23, 24

സ്ഥാനങ്ങളിൽ വരുന്നവരുടെ പ്രായത്തിന്റെ തുകയുടെ പകുതി എടുക്കണം. ആദ്യം കൂട്ടാവൃത്തികളെഴുതാം.

പ്രായം	തൊഴിലാളികളുടെ എണ്ണം
30 നേക്കാൾ കുറവ്	4
35 നേക്കാൾ കുറവ്	11
40 നേക്കാൾ കുറവ്	19
45 നേക്കാൾ കുറവ്	29
50 നേക്കാൾ കുറവ്	38
55 നേക്കാൾ കുറവ്	46

ഇതനുസരിച്ച്, പ്രായക്രമത്തിൽ 20 മുതൽ 29 വരെയുള്ള സ്ഥാനത്തു വരുന്ന 10 പേർ, 40 നും 45നും ഇടയ്ക്ക് പ്രായമുള്ളവരാണ്. നമുക്കാവശ്യമായ 23 ഉം 24 ഉം സ്ഥാനത്തുള്ളവർ ഇക്കൂട്ടത്തിലാണല്ലോ.

നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ 40 മുതൽ 45 വരെയുള്ള 5 വർഷത്തെ 10 സമഭാഗങ്ങളാക്കി, ഈ ഓരോ ഉപവിഭാഗത്തിലും ഒരാൾ വീതമുണ്ടെന്നും, അത്തരമൊരാളുടെ പ്രായം ഉപവിഭാഗത്തിന്റെ നടുക്കുള്ള സംഖ്യയാണെന്നും സങ്കൽപിക്കാം. അപ്പോൾ ഓരോ ഉപവിഭാഗത്തിന്റെയും നീളം $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ വർഷം.

ഇതനുസരിച്ച് 20-ാം സ്ഥാനത്തുള്ള ആളുടെ പ്രായം, 40 വർഷത്തിന്റെയും $40\frac{1}{2}$ വർഷത്തിന്റെയും നടുക്ക്; അതായത് $40\frac{1}{4}$ വർഷം. തുടർന്ന് 29-ാം സ്ഥാനം വരെയുള്ള ഓരോരുത്തരുടെയും പ്രായം $\frac{1}{2}$ വർഷം വീതം കൂടുമെന്നാണ് സങ്കൽപം; അപ്പോൾ 23-ാം സ്ഥാനത്തുള്ളയാളുടെ പ്രായം.

$$40\frac{1}{4} + \left(3 \times \frac{1}{2}\right) = 40\frac{1}{4} + 1\frac{1}{2} = 41\frac{3}{4} \text{ വർഷം}$$

24-ാം സ്ഥാനത്തുള്ളയാളുടെ പ്രായം

$$41\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = 42\frac{1}{4} \text{ വർഷം}$$

ഇനി മധ്യമപ്രായം കിട്ടാൻ, ഈ പ്രായങ്ങളുടെ തുകയുടെ പകുതി എടു ക്കണം

$$\frac{1}{2}\left(41\frac{3}{4}+42\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\times 84=42$$

അങ്ങനെ മധ്യമപ്രായം 42 എന്നു കാണാം.

ഈ കണക്കിൽ 23 ഉം 24 ഉം സ്ഥാനത്തുവരുന്നവർ 40 – 45 എന്ന ഒരേ പ്രായവിഭാഗത്തിലാണ്. ഇങ്ങനെയല്ലാത്ത സന്ദർഭങ്ങളിൽ അൽപം വ്യത്യ സ്തമായാണ് മധ്യമം കണക്കാക്കുന്നത്. ഈ ഉദാഹരണം നോക്കൂ:

ഒരു പരീക്ഷയെഴുതിയ കുട്ടികളെ മാർക്കിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ തരംതി രിച്ച പട്ടികയാണ് ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.

മാർക്ക്	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
0 – 10	4
10 – 20	7
20 – 30	9
30 – 40	12
40 – 50	8
ആകെ	40

മധ്യമ മാർക്ക് കണക്കാക്കണം.

ആദ്യം കൂട്ടാവൃത്തികൾ എഴുതാം:

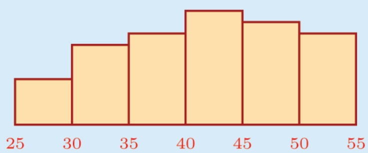
മാർക്ക്	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
10 നേക്കാൾ കുറവ്	4
20 നേക്കാൾ കുറവ്	11
30 നേക്കാൾ കുറവ്	20
40 നേക്കാൾ കുറവ്	32
50 നേക്കാൾ കുറവ്	40

ഇവിടെ കുട്ടികളെ മാർക്കിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ (ഏറ്റവും കുറവ് മുതൽ ഏറ്റവും കൂടുതൽ വരെ) ക്രമീകരിച്ചാൽ, 30 ൽത്താഴെ മാർക്കുള്ളവർ 20; അതായത്, ആകെയുള്ള 40 കുട്ടികളിൽ പകുതി.

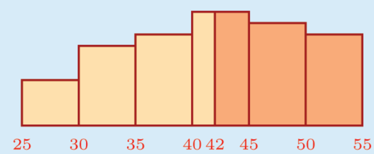
അപ്പോൾ മാർക്കിന്റെ മധ്യമമായി 30 തന്നെയാണ് എടുക്കുന്നത്. ആകെയു ള്ളവരിൽ പകുതിപ്പേരുടെ മാർക്ക് 30 ൽത്താഴെയും, മിച്ചമുള്ള പകുതിപ്പേ രുടെ മാർക്ക് 30 ൽക്കൂടുതലോ, 30 തന്നെയോ ആണെന്നതാണ് ഇതിലെ ന്യായം.

മധ്യമപരപ്പളവ്

ആവൃത്തിപ്പട്ടികയുടെ ആവൃത്തി ചതുരം വരച്ചത് ഓർമയില്ലേ? പ്രായക്കണക്കിലെ ആവൃത്തി ചതുരം ഇങ്ങനെയാണ്:



ഇതിൽ മധ്യമമായ 42 ൽക്കൂടി കുത്തനെ ഒരു വരച്ചാൽ ചിത്രം രണ്ടു ഭാഗങ്ങളാകും.



ഈ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളുടെയും പരപ്പളവ് തുല്യ മാണെന്നു കാണാൻ വിഷമമില്ലല്ലോ. (ചെയ്തു നോക്കൂ)

എല്ലാ കണക്കിലും മധ്യമത്തിന് ഈ ഗുണ മുണ്ടോ?

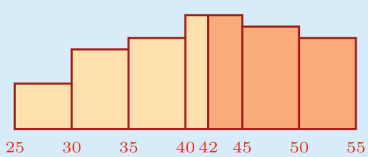
(1) ഒരു പ്രദേശത്തെ കുറേ വീടുകളെ വൈദ്യുതി ഉപയോഗമനുസരിച്ച് തരംതിരിച്ച പട്ടിക ഇങ്ങനെയാണ്.

വൈദ്യുതി ഉപയോഗം (യൂണിറ്റ്)	വീടുകളുടെ എണ്ണം
80 – 90	3
90 – 100	6
100 – 110	7
110 – 120	10
120 – 130	9
130 – 140	4

വൈദ്യുതി ഉപയോഗത്തിന്റെ മധ്യമം കണക്കാക്കുക.

മധ്യമസാധ്യത

മധ്യമത്തിലൂടെയുള്ള ലംബം, ആവൃത്തി ചതുരത്തെ ഒരേ പരപ്പളവുള്ള രണ്ടു ഭാഗങ്ങളാക്കുമെന്നു കണ്ടല്ലോ:



അപ്പോൾ, ഈ ചിത്രത്തിൽ ഒരു കുത്തിട്ടാൽ, അത് ഇതിലേതെങ്കിലും ഭാഗത്തിലാകാൻ ഒരേ സാധ്യതയാണ് (അഥവാ, സാധ്യത $\frac{1}{2}$).

അതായത്, കണക്കിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന സ്ഥാപനത്തിൽ പ്രത്യേക പരിഗണനയൊന്നുമില്ലാതെ ഒരാളെ എടുത്താൽ, അയാളുടെ പ്രായം 42 ൽകുറവാകാനും, കൂടുതലാകാനും ഒരേ സാധ്യതയാണ്.

(2) ഒരു ക്ലാസിലെ കുട്ടികളെ കണക്കു പരീക്ഷയ്ക്ക് ലഭിച്ച മാർക്ക് അനുസരിച്ച് എണ്ണംതിരിച്ച പട്ടികയാണ് ചുവടെയുള്ളത്.

മാർക്ക്	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
0 – 10	4
10 – 20	8
20 – 30	10
30 – 40	9
40 – 50	5

ക്ലാസിലെ മധ്യമ മാർക്ക് കണക്കാക്കുക.

(3) ഒരു സ്ഥാപനത്തിലെ ഉദ്യോഗസ്ഥർ ഒരു വർഷം കൊടുത്ത ആദായ നികുതിയുടെ പട്ടികയാണ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്.

ആദായ നികുതി (രൂപ)	ഉദ്യോഗസ്ഥരുടെ എണ്ണം
1000 – 2000	8
2000 – 3000	10
3000 – 4000	15
4000 – 5000	20
5000 – 6000	22
6000 – 7000	8
7000 – 8000	6
8000 – 9000	3

ആദായനികുതിയുടെ മധ്യമം കണക്കാക്കുക.

സൈബർ സുരക്ഷയെക്കുറിച്ച് അറിയൂ...

ഇന്റർനെറ്റിന്റെയും സോഷ്യൽ നെറ്റ്‌വർക്കിംഗ് സൈറ്റുകളുടെയും ഉപയോഗത്തെക്കുറിച്ച് നമുക്ക് അറിയാം. ആശയവിനിമയത്തിനും വിനോദത്തിനും അറിവു നേടുന്നതിലുമെല്ലാം ഇവയുടെ അനന്തസാധ്യത നാം നേരിട്ടറിഞ്ഞിട്ടുള്ളതാണല്ലോ.

എന്നാൽ കുറച്ചു കാലമായി വിദ്യാർഥികളും കൗമാരക്കാരുമായ ചിലരെങ്കിലും സോഷ്യൽ മീഡിയയുടെ ചൂഷിതവലയത്തിൽപ്പെടുന്നതായി നാം കാണുന്നു. ഇത്തരത്തിൽ ഇരകളാകുന്നതിൽ നിന്നും സ്വയം രക്ഷനേടുന്നതിനും സംരക്ഷിതരാകുന്നതിനും ഓരോരുത്തർക്കും കഴിയേണ്ടതുണ്ട്. ഇതിനായി ഓൺലൈൻ പ്രവർത്തനങ്ങളിൽ ഏർപ്പെടുമ്പോൾ ചില സുരക്ഷാമാർഗ്ഗങ്ങൾ നാം സ്വീകരിക്കേണ്ടതായിട്ടുണ്ട്.

⏩ സോഷ്യൽ നെറ്റ്‌വർക്കിംഗ് സൈറ്റുകൾ അപകടകാരികളാകുന്നതെപ്പോൾ?

- *ഒരാളുടെ സ്വകാര്യവിവരങ്ങളെല്ലാം പോസ്റ്റ് ചെയ്യുകയോ ഷെയർ ചെയ്യുകയോ ചെയ്യുമ്പോൾ; പ്രത്യേകിച്ച് ഫോൺ നമ്പർ, അഡ്രസ്, സ്ഥലം, ഫോട്ടോകൾ തുടങ്ങിയവ.*
- *ഒരാളുടെ പ്രൊഫൈൽ കണ്ട് അയാളെ വിശ്വസിക്കുമ്പോൾ; മിക്കപ്പോഴും നൽകിയിട്ടുള്ള പ്രൊഫൈൽ വ്യാജവും അസത്യവുമായിരിക്കും.*
- *ചാറ്റിന്റെ സ്നാപ്ഷോട്ടുകൾ, ഫോട്ടോകൾ, വീഡിയോകൾ എന്നിവ സേവ് ചെയ്യുന്നതും ഭാവിയിൽ അത് ബ്ലാക്ക്മെയിലിംഗിനും ഭീഷണിക്കും ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ.*
- *ഒരാളുടെ വ്യക്തിത്വം കളങ്കപ്പെടുത്താനുദ്ദേശിച്ച് തെറ്റായ വിവരങ്ങൾ, കമന്റുകൾ, പോസ്റ്റുകൾ, ഫോട്ടോകൾ എന്നിവയിലൂടെ സൈബർഭീഷണി ഉയർത്തുമ്പോൾ.*
- *കുട്ടികളെ വലയിലാക്കി ഇരകളാക്കുന്നതിന് മുതിർന്നവരും കഴുകൻകണ്ണുള്ളവരുമായ നിരവധി പേർ സമൂഹത്തിലുണ്ട്.*

⏩ സുരക്ഷിതമായ സോഷ്യൽ നെറ്റ്‌വർക്കിംഗിനുള്ള നിർദേശങ്ങൾ

- *നിങ്ങളുടെ വ്യക്തിപരമായ വിവരങ്ങൾ വ്യക്തിപരമായി സൂക്ഷിക്കുക.*
- *നിങ്ങളുടെ* Private Settings, Customize *ചെയ്യുക. മറ്റുള്ളവർക്ക് നിങ്ങളുടെ* Basic Info *മാത്രം കാണാൻ അവസരം നൽകുക.*
- *നിങ്ങളുടെ സുഹൃത്തുക്കളെ അറിയുക എന്നതിൽ മാത്രം ചുരുക്കുക. ഓൺലൈൻ സുഹൃത്തുക്കളെ വിശ്വസിക്കരുത്. സന്ദർശനം മാത്രമായി ചുരുക്കുക.*
- *നിങ്ങൾക്ക് ഇഷ്ടമില്ലാത്ത പോസ്റ്റുകൾ കണ്ടാൽ അത്തരം പോസ്റ്റുകൾ ലഭിക്കുന്നതിലുള്ള അതൃപ്തി നിങ്ങളുടെ സുഹൃത്തിനോട് തുറന്നു പറയുക.*
- *നിങ്ങളെ തിരിച്ചറിയാൻ കഴിയുന്ന തരത്തിലുള്ള സ്വകാര്യവിവരങ്ങൾ പോസ്റ്റ് ചെയ്യാതിരിക്കുക.*
- *ശക്തിയുള്ള പാസ്‌വേർഡുകൾ ഉപയോഗിക്കുക. അവ നിങ്ങളുടെ സുഹൃത്തുക്കൾക്ക് ഷെയർ ചെയ്യാതിരിക്കുക.*
- *നിങ്ങളുടെ ചിത്രങ്ങൾ, ഇ-മെയിൽ വിവരങ്ങൾ മുതലായവ മറ്റുള്ളവർക്ക് ഷെയർ ചെയ്യാതിരിക്കുക.*
- *നിങ്ങളുടെ സ്വകാര്യ സന്ദേശങ്ങൾ സ്വകാര്യമായി വയ്ക്കുക. ഒരിക്കൽ പോസ്റ്റ് ചെയ്താൽ അത് പ്രസിദ്ധമാകും.*

സൈബർസുരക്ഷയ്ക്കുള്ള ചില പ്രധാന ഫോൺ നമ്പരുകൾ

ക്രൈം സ്റ്റോപ്പർ - 1090

സൈബർ സെൽ - 9497975998

ചൈൽഡ് ഹെൽപ്പ്‌ലൈൻ - 1098/1517

കൺട്രോൾ റൂം - 100